

2027 6모 해설

09

두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(0) = 0, v_1(t) = t^2 - t \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

$$x_2(t) = 0, v_2(t) = t \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}t^2$$

임을 알 수 있다.

따라서 시각 $t=k$ 에서 두 점의 위치가 같아짐을 이용하면

$$x_1(k) = x_2(k) \Rightarrow \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 = \frac{1}{2}k^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}k^2(k-3) = 0$$

$$\Rightarrow k=3 \quad (\because k > 0)$$

을 얻는다.



③

10

주어진 조건들을 밑을 통일하여 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\bullet \log_9 a + \log_3 b = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_3 a + \log_3 b = 2$$

$$\bullet \log_3 a = 8\log_9 b \Rightarrow \log_3 a = 4\log_3 b$$

따라서 위 두 식을 연립하면

$$\log_3 a = \frac{8}{3} \Rightarrow a = 3^{\frac{8}{3}}, \log_3 b = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 3^{\frac{2}{3}}$$

을 얻는다. $\therefore \frac{a}{b} = 3^{\frac{8}{3} - \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$



③

11

각 실수 a 의 값에 따라서 극한

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

이 수렴할 조건과 수렴하지 않을 조건을 알아보자.

먼저 $a=0$ 일 때에는 위 극한이 수렴해야 한다. 따라서

$$(\text{분모}) \rightarrow 0 \text{ 이므로 } (\text{분자}) \rightarrow 0 \text{ 이어야 함 } \Rightarrow f(2)=0$$

임을 알 수 있다. ... ㉠

또한 $a=2$ 일 때에는 위 극한이 발산해야 하므로,

$$(\text{분모}) \rightarrow 0 \Rightarrow f(3)=3$$

임을 알 수 있다. ... ㉡

따라서 $f(x)=ax+b$ 라 놓으면

$$\text{㉠} \Rightarrow 2a+b=0, \text{㉡} \Rightarrow 3a+b=3$$

을 연고, 이를 연립하면 $a=3, b=-3$ 을 얻는다. $\therefore f(x)=3x-3, f(4)=6$ ¹⁾

답 ①

12

먼저 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 놓으면,

$$\begin{aligned} 2a_1(a_1+a_3) &= 5a_2(a_1+a_2) \Rightarrow 2a_1(a_1+a_1r^2) = 5a_1r(a_1+a_1r) \\ &\Rightarrow 2(1+r^2) = 5r(1+r) \\ &\Rightarrow 3r^2+5r-2=0 \\ &\Rightarrow (r+2)(3r-1)=0 \\ &\Rightarrow r = \frac{1}{3} \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

이제 위에서 구한 공비의 값을 문제에 주어진 식인

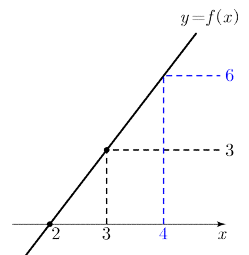
$$2a_1(a_1+a_3)=20$$

에 대입하면,

1) $f(x)$ 가 직선이므로

2, 3, 4가 등차수열을 이룸
 $\Rightarrow f(2), f(3), f(4)$ 도
 등차수열을 이룸

을 생각하면, 아래 그림과
 같이 $f(4)$ 의 값을 바로 알
 수도 있다.



$$\begin{aligned} 2a_1(a_1 + a_3) = 20 &\Rightarrow 2a_1\left(a_1 + \frac{1}{9}a_1\right) = 20 \\ &\Rightarrow \frac{20}{9}(a_1)^2 = 20 \\ &\Rightarrow a_1 = \pm 3 \end{aligned}$$

을 얻는다. $\therefore a_1 \times a_6 = (a_1)^2 \times r^5 = \frac{1}{27}$

답 ①

13

ㄱ. 먼저

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \{f(x) - g(x)\} dx \quad (\because f(x) > g(x)) \\ &\Rightarrow S'(t) = f(t) - g(t) = t^2 - 2t + a \end{aligned}$$

임을 생각하자. 위 식의 양변에 $t=1$ 을 대입하면

$$f(1) - g(1) = -1 + a \Rightarrow 1 = -1 + a \Rightarrow a = 2$$

를 얻는다. (거짓)

ㄴ. 위에서

$$a = 2 \Rightarrow f(t) - g(t) = t^2 - 2t + 3$$

임을 알았으므로, $S(3)$ 의 값은

$$\begin{aligned} S(3) &= \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^3 (t^2 - 2t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t \right]_0^3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

과 같이 계산할 수 있다. (참)

ㄷ. 문제에서 두 값

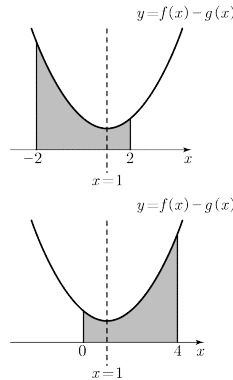
$$\int_{-2}^2 \{f(x) - g(x)\} dx, \quad \int_0^4 \{f(x) - g(x)\} dx$$

이 같은지 묻고 있다는 것을 생각하자.

직접 계산을 통해 확인해도 좋지만,

피적분함수인 $f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 3$ 이 $x=1$ 에 대해 **선대칭**

임을 이용하면 아래 그림과 같이 두 값이 같다는 것을 바로 알 수 있다. (참)



답 ⑤

14

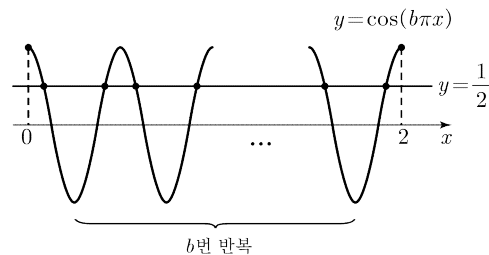
[풀이 1 : 삼각함수의 그래프]

먼저

$$\left(\cos(b\pi x) - \frac{1}{2} \right) \left(a \cos(b\pi x) + \frac{a+2}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(b\pi x) = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{7} \quad \text{또는} \quad \cos(b\pi x) = -\frac{a+2}{2a} \quad \dots \textcircled{8}$$

임을 생각하자. b 가 자연수이므로, 아래 그림에서 방정식 ⑦은 무조건 $2b$ 개의 실근을 갖는 것을 확인할 수 있다.



따라서 방정식 ⑦가 짝수 개의 실근을 갖는데, 전체 방정식이 홀수 개의 실근을 가지려면 방정식 ⑧도 홀수 개의 실근을 가져야 한다. 이를 만족시키는 경우는

$$a > 0 \Rightarrow -\frac{a+2}{2a} < 0$$

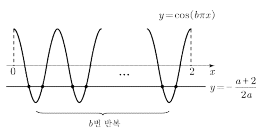
임을 생각하면 아래 그림과 같이 $-\frac{a+2}{2a} = -1$ 인 경우뿐이다. ¹⁾

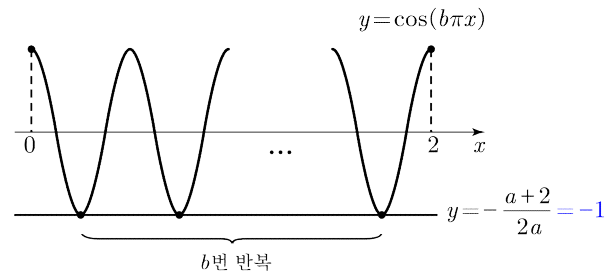
1) $-1 < -\frac{a+2}{2a} < 0$ 이면,

아래 그림과 같이 방정식

$$\cos(b\pi x) = -\frac{a+2}{2a}$$

이 $2b$ 개의 실근을 가지므로, 실근의 개수가 홀수가 될 수 없다.





따라서 위에서 얻은 내용을 정리하면 아래와 같다.

1. $-\frac{a+2}{2a} = -1$

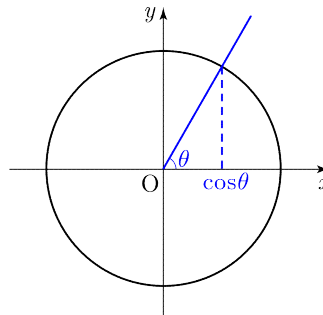
2. 방정식 ㉠은 $2b$ 개의 실근을, 방정식 ㉡은 b 개의 실근을 가짐 $\Rightarrow 3b = 15$

위 식들로부터 $a=2$, $b=5$ 임을 알 수 있다. $\therefore a+b=7$

[풀이 2 : 단위원의 활용]

두 방정식 $\cos(b\pi x) = \frac{1}{2}$, $\cos(b\pi x) = -\frac{a+2}{2a}$ 를 단위원 위에서 관찰해보자.

단위원 위에서 $\cos\theta$ 의 값은 동경 θ 에서의 x 좌표를 의미한다.



$0 \leq x \leq 2$ 일 때 $\cos(b\pi x)$ 의 동경의 범위는 $0 \leq \theta \leq 2b\pi$ 이고, b 는 자연수이므로, 동경 θ 는 시초선으로부터 정확하게 b 바퀴 회전한다.

따라서, $0 \leq x \leq 2$ 일 때 두 방정식 $\cos(b\pi x) = \frac{1}{2}$, $\cos(b\pi x) = -\frac{a+2}{2a}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 동경 θ 가 시초선으로부터 b 바퀴 회전하는 동안 x 좌표가 $\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{a+2}{2a}$ 가 되는 횟수로 이해할 수 있다.

방정식의 서로 다른 실근의 개수가 15로 홀수이므로, b 는 홀수이고, 한 바퀴 회전하는 동안 x 좌표가 $\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{a+2}{2a}$ 가 되는 횟수 또한 홀수이다.

따라서, 이를 만족하려면, $-\frac{a+2}{2a} = \pm 1$ 이 되어야 하고 ²⁾, a 는 양수이므로

$$-\frac{a+2}{2a} = -1 \rightarrow a+2=2a \rightarrow a=2$$

임을 알 수 있다.

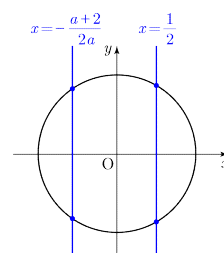
이때, 동경 θ 가 한 바퀴 도는 동안 $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{a+2}{2a}$ 와 총 3개의 교점을 가지므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 15가 되려면, 동경 θ 는 총 5바퀴 회전해야 한다.

따라서, $b=5$ 이므로 $a+b=2+5=7$ 임을 알 수 있다.

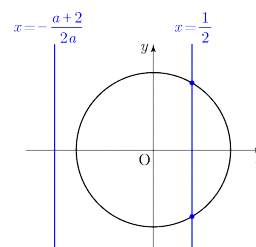
답 ③

$$2) -1 < -\frac{a+2}{2a} < 1 \text{ 인}$$

경우, 아래 그림과 같이 동경 θ 가 한 바퀴 회전하는 동안 $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{a+2}{2a}$ 와 총 4개의 교점을 가지므로 모순임을 알 수 있다.



$\left| -\frac{a+2}{2a} \right| > 1$ 인 경우, 아래 그림과 같이 동경 θ 가 한 바퀴 회전하는 동안 $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{a+2}{2a}$ 와 총 2개의 교점을 가지므로 모순임을 알 수 있다.



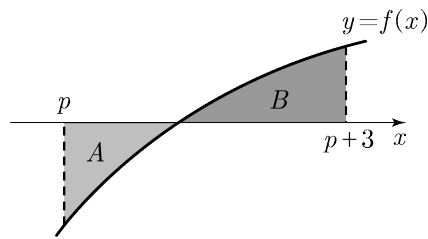
15

(가) 조건의 부등식

$$\int_p^{p+3} |f(x)| dx \neq \left| \int_p^{p+3} f(x) dx \right| \quad \cdots \textcircled{7}$$

에서 양변의 값이 다를 조건을 파악해 보자.

먼저 아래와 같이 구간 $(p, p+3)$ 에 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재하는 경우를 살펴보자.



이 경우 구간 $[p, p+3]$ 에서

x 축의 아래쪽 부분과 곡선 $y=f(x)$ 가 이루는 부분의 넓이 $\Rightarrow A$

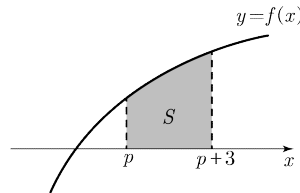
x 축의 위쪽 부분과 곡선 $y=f(x)$ 가 이루는 부분의 넓이 $\Rightarrow B$

라 놓으면,

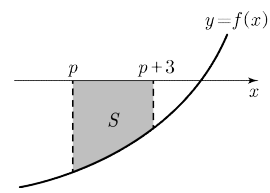
$$\int_p^{p+3} |f(x)| dx = A + B, \quad \left| \int_p^{p+3} f(x) dx \right| = |B - A|$$

가 되어 두 값이 같을 수 없다. 따라서 이 경우엔 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

이번에는 아래 그림과 같이 구간 $(p, p+3)$ 에서 $f(x)$ 의 부호가 항상 일정한 경우를 살펴보자.



① 구간 $(p, p+3)$ 에서 $f(x) \geq 0$ 인 경우



② 구간 $(p, p+3)$ 에서 $f(x) \leq 0$ 인 경우

이 경우에 구간 $[p, p+3]$ 에서

x 축과 곡선 $y=f(x)$ 으로 이루어진 부분의 넓이 $\Rightarrow S$

라고 놓으면,

$$\int_p^{p+3} |f(x)| dx = \left| \int_p^{p+3} f(x) dx \right| = S$$

가 되어 $\textcircled{7}$ 을 만족시키지 않는다.

즉, 위에서 논의한 내용을 정리하면

부등식 ㉠ 성립 $\Rightarrow$ 구간 $(p, p+3)$ 에 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재

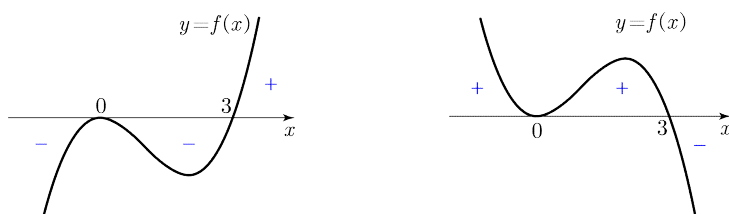
임을 알 수 있고, 이를 이용하면 (가) 조건에서

㉠을 만족시키는 실수 p 의 범위가 $0 < p < 3$

$\Rightarrow f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 $x=3$ 뿐 ... ㉡

임을 얻는다.

따라서 $f(0)=0$ 임과 ㉡을 고려했을 때 가능한 $f(x)$ 의 개형은 아래 두 가지 경우이다.



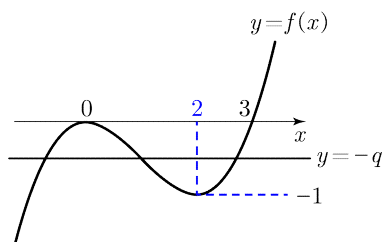
(나) 조건의 부등식도 (가) 조건의 부등식과 유사하게

$$\int_0^3 |f(x)+q| \neq \left| \int_0^3 (f(x)+q) dx \right|$$

$\Rightarrow$ 구간 $(0, 3)$ 에 $f(x)+q$ 의 부호가 바뀌는 지점 존재

$\Rightarrow$ 구간 $(0, 3)$ 에 $f(x)$ 와 $-q$ 의 대소관계가 바뀌는 지점 존재

와 같이 해석할 수 있다. 이를 만족시키는 q 의 범위가 $0 < q < 1$ 이므로, $f(x)$ 의 개형은 다음 그림과 같이 결정된다.



따라서 $f(x) = kx^2(x-3)$ 이라 놓으면,

$$f(2) = -4k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

를 얻는다. $\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3)$, $f(6) = 27$

20

문제에 주어진 풀이를 그대로 따라가자. 먼저

$$3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

이므로, 이를 이용하면

$$m = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3\alpha}{\alpha} = 3$$

을 얻는다. $\Rightarrow \boxed{(가)} = 3$

이를 이용하면

$$\begin{aligned} \beta^4 &= 3\alpha\beta^3 \quad (\because \beta = 3\alpha) \\ &= 3 \quad (\because \alpha\beta^3 = 1) \end{aligned}$$

임을 생각했을 때 $\beta = 3^{\frac{1}{4}}$ ($\because \beta > 0$)을 얻는다. $\Rightarrow \boxed{(나)} = 3^{\frac{1}{4}}$

이제 마지막으로 $g(m) = g(3)$ 의 값을 계산하면

$$\begin{aligned} g(3) &= -\log_b 3 \\ &= -\frac{1}{\log_3 b} \\ &= \frac{\beta}{\log_3 \alpha} \quad (\because b = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}) \\ &= \frac{\beta}{-1 + \log_3 \beta} \quad (\because \alpha = \frac{\beta}{3}) \\ &= -\frac{4}{3} \times 3^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. $\Rightarrow \boxed{(다)} = -\frac{4}{3} \times 3^{\frac{1}{4}}$

$$\therefore p = 3, \quad q = 3^{\frac{1}{4}}, \quad r = -\frac{4}{3} \times 3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow (p \times q \times r)^2 = 48$$

21

먼저

$f(t)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수

$\Rightarrow f'(t)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수

$\Rightarrow f'(t) - 4t^2 + 4$ 는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수

임을 생각하고

$$f'(t) - 4t^2 + 4 = -(t-p)^2 + q$$

라 놓자. 그러면 x 에 대한 방정식

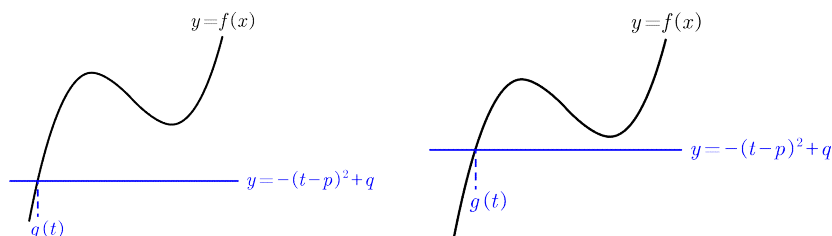
$$f(x) = -(t-p)^2 + q$$

의 실근의 최댓값이 $g(t)$ 인 것으로 해석할 수 있다.¹⁾

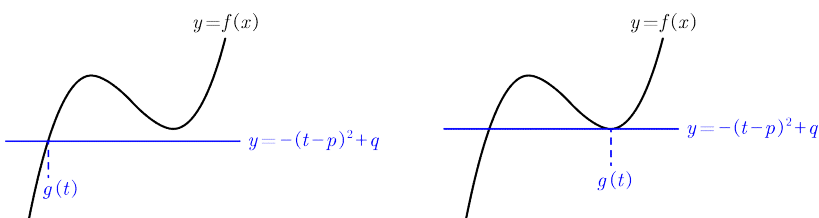
이제 $f(x)$ 의 개형을 아무렇게나 그려놓고, $g(t)$ 의 값을 t 의 값에 따라서 관찰해 보자.

(i) $t < p$ 인 경우

이 경우 아래 그림과 같이 t 의 값이 증가할수록 $-(t-p)^2 + q$ 의 값도 증가할 것이다.



그러다가 $-(t-p)^2 + q$ 의 값이 $f(x)$ 의 극솟값과 같아지는 순간 $g(t)$ 의 값이 갑자기 변하는, $g(t)$ 의 불연속점이 생기는 것을 확인할 수 있다.

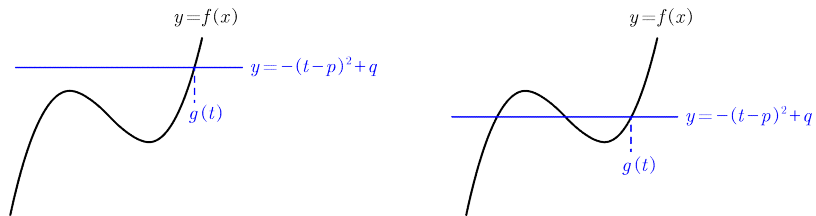


1) 이때 우변의

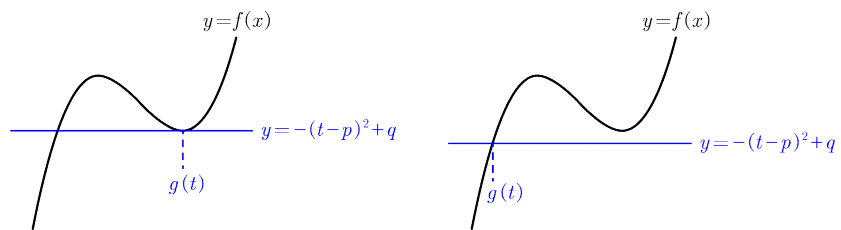
$-(t-p)^2 + q$ 는 x 의
관점에서 상수라는 것을
명심하자.

(ii) $t \geq p$ 인 경우

이 경우엔 아래 그림과 같이 t 의 값이 증가할수록 $-(t-p)^2+q$ 의 값은 감소한다.



그러다가 아래 그림과 같이 $-(t-p)^2+q$ 의 값이 $f(x)$ 의 극솟값보다 살짝 작아지는 순간 $g(t)$ 의 값이 갑자기 바뀌는, $g(t)$ 의 불연속점이 생기는 것을 확인할 수 있다.



이제 $g(t)$ 가 어떤 방식으로 변화하는지 알았으니, $f(x)$ 의 식을 결정해 보자.

먼저 위 관찰들로부터,

$$g(t) \text{는 } -(t-p)^2+q = (f(x) \text{의 극솟값}) \text{인 } t \text{에서 불연속}$$

임을 확인할 수 있었다. 이를 이용하면

$$g(t) \text{가 } t=3 \text{에서 '만' 불연속}$$

$$\Rightarrow -(t-p)^2+q = (f(x) \text{의 극솟값}) \text{인 } t \text{가 오직 하나뿐}$$

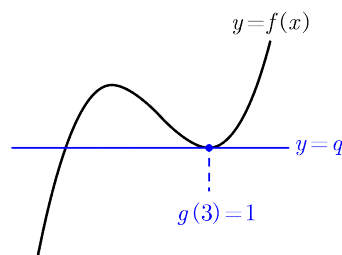
$$\Rightarrow p=3$$

을 얻는다.

한편 $g(3)=1$ 조건을 이용하기 위해 $t=3$ 일 때의

$$y=f(x), y=-(t-3)^2+q=q$$

의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



위 그림으로부터 $f'(1)=0$, $f(1)=q$ 임을 알 수 있다.

이제 여태까지 얻은 조건인

$$f'(t) - 4t^2 + 4 = -(t-3)^2 + q, \quad f'(1) = 0, \quad f(1) = q$$

을 바탕으로 $f(x)$ 의 식을 결정해 보자.

먼저

$$\begin{aligned} f'(t) - 4t^2 + 4 &= -(t-3)^2 + q = -t^2 + 6t + (q-9) \\ \Rightarrow f'(t) &= 3t^2 + 6t + (q-13) \end{aligned}$$

에서

$$f'(1) = 0 \Rightarrow q - 4 = 0 \Rightarrow q = 4$$

를 얻는다. 이로부터 $f(t)$ 의 식을

$$f'(t) = 3t^2 + 6t - 9 \Rightarrow f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

라 놓으면,

$$f(1) = q = 4 \Rightarrow -5 + C = 4 \Rightarrow C = 9$$

임을 알 수 있다. $\therefore f(x) = t^3 + 3t^2 - 9t + 9, \quad f(2) = 11$

1) $2n, 4n+1, 4n+3$ 가 나타내는 자연수는 서로 겹치지 않는다.

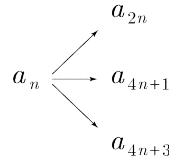
즉, 임의의 인덱스 k 가 주어졌을 때, 이 k 를 만들어낸 이전 인덱스는 유일하게 결정된다. (역연산이 유일하게 결정)

따라서, 역추적 과정을 반복적으로 진행하면, 인덱스는 점점 작아지며 최종적으로 역연산을 적용할 수 없는 값에 도달하게 된다.

이때, 조건에서 $2n, 4n+1, 4n+3$ 은 1, 3 을 제외한 모든 자연수를 나타내므로, 모든 항 a_k 는 시작점인 $a_1 = 1, a_3 = 4$ 중 하나의 뿌리(Root)로부터 파생되는 유일한 경로를 가짐을 알 수 있다.

22

주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 점화식에서, a_n 을 기반으로 $a_{2n}, a_{4n+1}, a_{4n+3}$ 의 값을 구할 수 있음을 알 수 있다.



이때, 자연수 n 에 대하여, 1, 3 을 제외한 모든 자연수 k 는 $2n$ (짝수), $4n+1$ (홀수), $4n+3$ (홀수) 중 하나의 형태로 표현할 수 있다.

따라서, 임의의 a_k 는 시작점인 $a_1 = 1, a_3 = 4$ 로부터 유일한 연산 경로(수형도, Tree)를 거쳐 생성된다. ¹⁾

따라서, $a_k = 10$ 을 만족하는 k 의 개수는 a_1 또는 a_3 에서 출발하여 +1 또는 +4 의 연산을 거쳐 최종 값이 10 이 되게 하는 연산 경로의 수와 같다. (단, $a_{4n+3} = a_{4n+1} = a_n + 4$ 이므로 +4 를 만드는 연산은 2가지가 존재한다.)

(i) $a_1 = 1$ 에서 출발하는 경우

값이 1 에서 10 이 되어야 하므로 필요한 값의 증가량은 +9 이다.

+1 연산의 횟수를 x , +4 연산의 횟수를 y 라 할 때 $x + 4y = 9$ 이다.

① : $y = 0, x = 9$ 일 때

+1 연산만 9 번 수행하므로 연산의 가짓수를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{9!}{9!} = 1$$

② : $y = 1, x = 5$ 일 때

+4 연산을 1 번, +1 연산을 5 번 수행하므로 연산의 순서를 정하는 가짓수는

$$\frac{6!}{5! \times 1!} = 6$$

이고, +4 연산은 두 규칙 $a_{4n+1} = a_n + 4$, $a_{4n+3} = a_n + 4$ 중 하나를 선택할 수 있으므로 $2^1 = 2$ 가지이다.

따라서, 가능한 총 가짓수는 $6 \times 2 = 12$ 이다.

③ : $y = 2, x = 1$ 일 때

+4 연산을 2 번, +1 연산을 1 번 수행하므로 연산의 순서를 정하는 가짓수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

이고, +4 연산은 두 규칙 $a_{4n+1} = a_n + 4$, $a_{4n+3} = a_n + 4$ 중 하나를 선택할 수 있으므로 $2^2 = 4$ 가지이다.

따라서, 가능한 총 가짓수는 $3 \times 4 = 12$ 이다.

따라서, a_1 에서 출발하여 10 을 만드는 총 경로의 수는

$$1 + 12 + 12 = 25$$

임을 알 수 있다.

(ii) $a_3 = 4$ 에서 출발하는 경우

값이 4 에서 10 이 되어야 하므로 필요한 값의 증가량은 +6 이다.

+1 연산의 횟수를 x , +4 연산의 횟수를 y 라 할 때 $x + 4y = 6$ 이다.

① : $y = 0, x = 6$ 일 때

+1 연산만 6 번 수행하므로 연산의 가짓수를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{6!}{6!} = 1$$

② : $y = 1, x = 2$ 일 때

+4 연산을 1 번, +1 연산을 2 번 수행하므로 연산의 순서를 정하는 가짓수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

이고, +4 연산은 두 규칙 $a_{4n+1} = a_n + 4, a_{4n+3} = a_n + 4$ 중 하나를 선택할 수 있으므로 $2^1 = 2$ 가지이다.

따라서, 가능한 총 가짓수는 $3 \times 2 = 6$ 이다.

따라서, a_3 에서 출발하여 10 을 만드는 총 경로의 수는

$$1 + 6 = 7$$

이므로 구하는 자연수 k 의 총 개수는 $25 + 7 = 32$ 이다.

[참고]

위의 22번 문항의 해설을 보면, 수열보다는 확률과 통계 문항의 느낌이 강하다.

실제로, 점화식의 해석을 통해 a_1, a_3 으로부터 파생된 수형도가 서로 중복되지 않는다는 점만 인지하면, 단순 자연수 분할 문항으로 바뀐다.

22번 문항을 확률과 통계 형식으로 바꾸면 다음과 같다.

22. 철수가 1층부터 10층까지 있는 건물에서 10층으로 올라가려고 한다. 철수의 출발 위치는 1층 또는 4층이며, 한 번 이동할 때마다 다음 두 가지 규칙 중 하나를 선택하여 올라갈 수 있다.

(가) 1개 층을 올라간다.

(나) 4개 층을 올라간다. (단, 4개 층을 올라갈 때는 '방법 A'와 '방법 B' 중 하나를 선택할 수 있다.)

철수가 1층에서 출발하여 10층에 도달하는 경우의 수와 4층에서 출발하여 10층에 도달하는 경우의 수를 합한 총 경우의 수를 구하시오. [4점]

확률과 통계 27

전체 함수의 개수에서 조건을 만족시키지 않는 함수의 개수를 빼는 방법, 즉 **여집합**으로 생각하자.

집합 X 의 원소는 5개이고, 각 원소는 집합 $Y = \{1, 2, 3\}$ 의 원소 3개 중 하나에 대응될 수 있다. 따라서 X 에서 Y 로의 함수의 전체 개수는

$$3^5 = 243$$

이다. 이제 조건

$$f(1) \times f(2) \neq 4$$

를 만족시키지 않는 경우는

$$f(1) \times f(2) = 4$$

인 경우를 세면 된다. 그런데 $f(1)$, $f(2)$ 는 모두 1, 2, 3 중 하나이므로, 두 값의 곱이 4가 되려면

$$f(1) = 2, f(2) = 2$$

이어야 한다. 이때 나머지 원소

$$3, 4, 5$$

는 각각 1, 2, 3 중 하나에 **자유롭게 대응**될 수 있으므로, 조건을 만족시키지 않는 함수의 개수는

$$3^3 = 27$$

이다. 따라서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$$243 - 27 = 216$$

이다.

확률과 통계 28



처음에

카드 1, 6 ⇨ 뒷면, 카드 2, 3, 4, 5 ⇨ 앞면

이다. 이때 4번의 시행이 끝난 뒤 모든 카드가 앞면이 되어야 하므로,

카드 1, 6 ⇨ 홀수 번 뒤집혀야 함

카드 2, 3, 4, 5 ⇨ 짝수 번 뒤집혀야 함

을 알 수 있다. 주사위 눈에 따라 뒤집히는 카드를 정리하면 다음과 같다.

주사위 눈	뒤집히는 카드
1	1
2	2, 3, 4, 5, 6
3	1, 2, 3
4	4, 5, 6
5	1, 2, 3, 4, 5
6	6

이제 홀수 번 나온 주사위 눈을 생각하자.

카드 1은 주사위 눈 1, 3, 5가 나올 때 뒤집히고,

카드 2는 주사위 눈 2, 3, 5가 나올 때 뒤집힌다.

둘은 3, 5에서는 같이 뒤집히고, 차이는 1과 2에서만 생긴다.

그런데 카드 1은 홀수 번, 카드 2는 짝수 번 뒤집혀야 하므로

1, 2 중에서는 정확히 하나만 홀수 번 나와야 함

을 알 수 있다. 이번에는 카드 2와 카드 4를 비교해 보자.

카드 2는 주사위 눈 2, 3, 5가 나올 때 뒤집히고,

카드 4는 주사위 눈 2, 4, 5가 나올 때 뒤집힌다.

둘은 2, 5에서는 같이 뒤집히고, 차이는 3과 4에서만 생긴다.

그런데 카드 2와 카드 4는 둘 다 짝수 번 뒤집혀야 하므로

3, 4는 둘 다 홀수 번 나오거나, 둘 다 짝수 번 나와야 함

을 알 수 있다.

마지막으로 카드 5와 카드 6을 비교해 보자.

카드 5는 주사위 눈 2, 4, 5가 나올 때 뒤집히고

카드 6은 주사위 눈 2, 4, 6이 나올 때 뒤집힌다.

둘은 2, 4에서는 같이 뒤집히고, 차이는 5와 6에서만 생긴다.

그런데 카드 5는 짝수 번, 카드 6은 홀수 번 뒤집혀야 하므로

5, 6 중에서는 정확히 하나만 홀수 번 나와야 함

을 알 수 있다. 따라서 홀수 번 나와야 하는 주사위 눈을 정리하면 다음과 같은 모양이어야 한다.

① 1, 2중 하나

② 3, 4는 둘 다 나오거나 둘 다 나오지 않기

③ 5, 6중 하나

이 조건을 만족시키면서 실제로 카드 2가 짝수 번 뒤집히는 경우만 고르면,

$\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}$

의 4가지이다. 즉, 4번 던졌을 때 홀수 번 나온 주사위 눈의 모임이 위 4가지 중 하나이면 된다. 이제 경우의 수를 세자.

먼저 홀수 번 나온 눈이

$\{1, 6\}$

처럼 2개인 경우를 생각하자. 4번 던져서 두 눈만 홀수 번 나오려면 다음 두 경우가 있다.

(i) 한 눈이 3번, 다른 한 눈이 1번 나오는 경우

3번 나올 눈을 정하는 방법이 2가지이고, 배열하는 방법이 4가지이므로

$$2 \times 4 = 8$$

가지이다.

(ii) 두 눈이 각각 1번씩 나오고, 나머지 네 눈 중 하나가 2번 나오는 경우

2번 나올 눈을 정하는 방법이 4가지이고, 배열하는 방법은

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

가지이므로

$$4 \times 12 = 48$$

가지이다.

따라서 홀수 번 나온 눈이 2개인 경우 하나당

$$8 + 48 = 56$$

가지이다. 이런 경우는

$$\{1, 6\}, \{2, 5\}$$

의 2가지이므로

$$2 \times 56 = 112$$

가지이다.

이번에는 홀수 번 나온 눈이

$$\{1, 3, 4, 5\}$$

처럼 4개인 경우를 생각하자. 주사위를 총 4번만 던지므로, 이 네 눈이 각각 1번씩 나와야 한다. 따라서 배열하는 방법은

$$4! = 24$$

가지이다. 이런 경우는

$$\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}$$

의 2가지이므로

$$2 \times 24 = 48$$

가지이다.

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$112 + 48 = 160$$

이다. 전체 경우의 수는 주사위를 4번 던지는 경우이므로

$$6^4 = 1296$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{160}{1296} = \frac{10}{81}$$

이다.

확률과 통계 29

꼭이 홀수라는 것은 **나온 다섯 눈이 모두 홀수**라는 뜻이다. 따라서 각 주사위에서 나올 수 있는 눈은 1, 3, 5 뿐이다.

먼저 **다섯 개의 눈이 모두 홀수**일 경우의 수를 구하면, 각 주사위마다 가능한 눈이 3가지이므로

$$3^5 = 243$$

이다. 이제 이 중에서 다섯 눈의 합이 15가 되는 경우를 찾아보자.

1, 3, 5 중에서 다섯 개를 골라 합이 15가 되어야 하므로 가능한 모양은

- ① 3, 3, 3, 3, 3
- ② 1, 3, 3, 3, 5
- ③ 1, 1, 3, 5, 5

의 세 가지뿐이다. 각각의 경우를 배열하는 방법을 세어 보자. 먼저

- ① 3, 3, 3, 3, 3

은 모두 같은 눈이므로 경우의 수가 1가지이다.

다음으로

- ② 1, 3, 3, 3, 5

는 3이 3개 같고, 1과 5가 각각 1개씩 있으므로 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20 \text{ 가지이다.}$$

마지막으로

- ③ 1, 1, 3, 5, 5

는 1이 2개, 5가 2개 같으므로 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!} = 30$ 가지이다.

따라서 다섯 눈의 합이 15가 되는 경우의 수는 $1 + 20 + 30 = 51$ 이다.
그러므로 구하는 확률은

$$\frac{51}{243} = \frac{17}{81} \Rightarrow p=81, q=17$$

이므로 $p+q=98$ 이다.

확률과 통계 30

먼저 노란색 공과 보라색 공이 서로 이웃하지 않게 놓아야 하는데, 이 조건에서 중요한 건 검은색 공이다. 검은색 공은

노란색 공과 보라색 공 사이를 끊어 주는 역할

을 하기 때문이다. 먼저 검은색 공 4개를 일렬로 놓자.

$$\square B \square B \square B \square B \square$$

그러면 노란색 공과 보라색 공이 들어갈 수 있는 자리는 모두 5칸이다.

이때 각 칸에는

노란색 공만 들어가거나, 보라색 공만 들어가거나, 비어 있어야 한다

는 것을 알 수 있다. 이제 노란색 공이 들어가는 칸의 개수를 기준으로 나누자. 노란색 공 4개가 들어가는 칸의 개수를 m 이라 하면

$$m = 1, 2, 3, 4$$

이다. 먼저 5칸 중에서 노란색 공이 들어갈 m 칸을 고르는 경우의 수는

$${}_5C_m$$

이다. 그 m 칸에 노란색 공 4개를 적어도 1개씩 나누어 넣어야 하므로 경우의 수는

$${}_3C_{m-1}$$

이다. 이제 보라색 공은 노란색 공이 들어가지 않은 나머지 $5-m$ 칸에만 들어갈 수 있다. 이 칸들 중에는 **비어 있는 칸이 있어도 되므로**, 보라색 공 4개를 $5-m$ 칸에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_{8-m}C_4$$

이다. 따라서 전체 경우의 수는

$${}_5C_m \times {}_3C_{m-1} \times {}_{8-m}C_4$$

를 $m = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여 모두 더하면 된다.

$$\begin{aligned} &({}_5C_1 \times {}_3C_0 \times {}_7C_4) + ({}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_6C_4) \\ &+ ({}_5C_3 \times {}_3C_2 \times {}_5C_4) + ({}_5C_4 \times {}_3C_3 \times {}_4C_4) \end{aligned}$$

계산하면 $5 \times 1 \times 35 + 10 \times 3 \times 15 + 10 \times 3 \times 5 + 5 \times 1 \times 1 = 780$ 이다.

미적분 27

주어진 식 $x = at + \tan t$, $y = 1 + \sec t$ 의 양변을 t 에 대해 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = a + \sec^2 t, \quad \frac{dy}{dt} = \sec t \times \tan t$$

이다. 따라서, 점 P의 시각 t 에서의 속력을 $v(t)$ 라 할 때, $v(t)$ 를 구하면

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(a + \sec^2 t)^2 + (\sec t \times \tan t)^2}$$

임을 알 수 있다.

점 P의 시각 $t = \frac{3}{4}\pi$ 에서의 속력이 $t = \pi$ 에서의 속력과 같으므로

$v\left(\frac{3}{4}\pi\right) = v(\pi)$ 이다. $v\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ 를 구하면

$$v\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{(a+2)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 6}$$

이고, $v(\pi)$ 를 구하면

$$v(\pi) = \sqrt{(a+1)^2 + 0} = \sqrt{a^2 + 2a + 1}$$

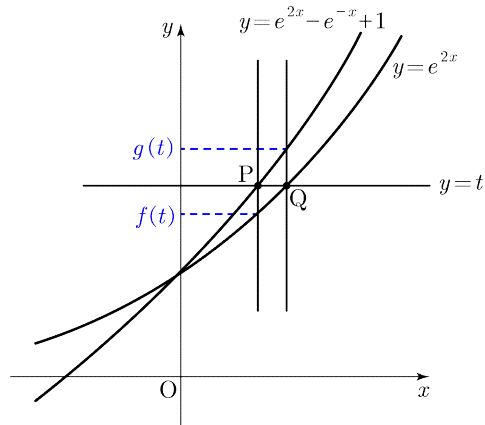
이므로 $v\left(\frac{3}{4}\pi\right) = v(\pi)$ 를 계산하면

$$\sqrt{a^2 + 4a + 6} = \sqrt{a^2 + 2a + 1} \rightarrow 2a = -5 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

임을 알 수 있다.

미적분 28

문제 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y = e^{2x}$ 와 직선 $y = t$ 의 교점의 x 좌표는

$$e^{2x} = t \rightarrow x = \frac{1}{2} \ln t$$

이므로, 점 Q의 x 좌표는 $\frac{1}{2} \ln t$ 이다. 따라서, $g(t)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$g(t) = e^{2(\frac{1}{2} \ln t)} - e^{-\frac{1}{2} \ln t} + 1 = t - t^{-\frac{1}{2}} + 1$$

함수 $g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 와 이계도함수 $g''(t)$ 를 구하면

$$g'(t) = 1 + \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}, \quad g''(t) = -\frac{3}{4} t^{-\frac{5}{2}}$$

임을 알 수 있다.

[풀이 1 : 음함수로 함수 $f(t)$ 표현하기]

점 P의 x 좌표를 α 라 할 때, 점 P는 곡선 $y = e^{2x} - e^{-x} + 1$ 위의 점이므로 다음의 관계식이 성립한다.

$$e^{2\alpha} - e^{-\alpha} + 1 = t \quad \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 t 에 대해 미분하면

$$(2e^{2\alpha} + e^{-\alpha}) \frac{d\alpha}{dt} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

임을 알 수 있다.

$f(t)=e^{2\alpha}$ 이므로 함수 $f(t)$ 의 도함수 $f'(t)$ 를 구하면

$$f'(t)=2e^{2\alpha}\times\frac{d\alpha}{dt}=\frac{2e^{2\alpha}}{2e^{2\alpha}+e^{-\alpha}}$$

이고, 이계도함수 $f''(t)$ 를 구하면

$$f''(t)=\frac{6e^{\alpha}}{(2e^{2\alpha}+e^{-\alpha})^2}\times\frac{d\alpha}{dt}=\frac{6e^{\alpha}}{(2e^{2\alpha}+e^{-\alpha})^3}$$

임을 알 수 있다.

$t=1$ 일 때의 α 의 값을 구하기 위해 ㉠에 $t=1$ 을 대입하면

$$e^{2\alpha}-e^{-\alpha}+1=1\rightarrow e^{\alpha}=1\rightarrow\alpha=0$$

임을 알 수 있다. 따라서, 이를 대입하여 $f'(1)$, $f''(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$f'(1)=\frac{2}{3}, f''(1)=\frac{2}{9}, g'(1)=\frac{3}{2}, g''(1)=-\frac{3}{4}$$

구하고자 하는 극한식 $\lim_{t\rightarrow 1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$ 의 분자에 $t=1$ 을 대입하면

$$9f'(1)-4g'(1)=9\times\left(\frac{2}{3}\right)-4\times\left(\frac{3}{2}\right)=6-6=0$$

이므로

$$\lim_{t\rightarrow 1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}=\frac{d}{dt}(9f'(t)-4g'(t))|_{t=1}=9f''(1)-4g''(1)$$

임을 알 수 있다. 이때, $f''(1)=\frac{2}{9}$, $g''(1)=-\frac{3}{4}$ 이므로 대입하면

$$9f''(1)-4g''(1)=9\times\frac{2}{9}-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=2-(-3)=5$$

임을 알 수 있다.

[풀이 2 : 역함수로 함수 $f(t)$ 표현하기]

점 P 의 x 좌표를 x_P , $p(x)=e^{2x}-e^{-x}+1$ 이라 할 때, $p(x_P)=t$ 가 성립하므로

$$x_P=p^{-1}(t)$$

임을 알 수 있다. 따라서, $f(t)=e^{2p^{-1}(t)}$ 라 표현할 수 있다.

우리가 구하고자 하는 극한식은 $t \rightarrow 1$ 일 때이므로 $t=1$ 일 때 $p(x)=1$ 이 되는 x 의 값을 찾으면

$$e^{2x} - e^{-x} + 1 = 1 \rightarrow e^{3x} = 1 \rightarrow x = 0$$

이 되어, $t \rightarrow 1$ 일 때, $x \rightarrow 0$ 으로 치환할 수 있다.

함수 $p(x)$ 의 도함수 $p'(x)$ 와 이계도함수 $p''(x)$ 를 구하면

$$p'(x) = 2e^{2x} + e^{-x}, \quad p''(x) = 4e^{2x} - e^{-x}$$

이므로

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 3, \quad p''(0) = 3$$

임이 성립한다.

함수 $f(t)$ 의 도함수 $f'(t)$ 를 구하면

$$f'(t) = 2(p^{-1})'(t)e^{2p^{-1}(t)}$$

이므로 이를 주어진 극한식 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{9f'(t) - 4g'(t)}{t-1}$ 에 대입하면

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{9f'(t) - 4g'(t)}{t-1} = \frac{18 \times (p^{-1})'(t) \times e^{2p^{-1}(t)} - 4 \left(1 + \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \right)}{t-1}$$

1) 역함수의 미분법에 의해

$$(p^{-1})'(p(t)) = \frac{1}{p'(t)}$$

임을 활용하자.

임을 알 수 있다. 이때, 위의 식이 복잡하므로 $t=p(x)$ 를 대입하면¹⁾

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{9f'(t) - 4g'(t)}{t-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{18e^{2x}}{p'(x)} - 4 \left(1 + \frac{1}{2} (p(x))^{-\frac{3}{2}} \right)}{p(x) - 1}$$

임을 알 수 있다. 위의 극한식의 분모와 분자에 각각 x 를 나누면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{18e^{2x}}{p'(x)} - 4 \left(1 + \frac{1}{2} (p(x))^{-\frac{3}{2}} \right)}{\frac{p(x)-1}{x}} = \frac{18e^{2x} \left(\frac{2}{p'(0)} - \frac{p''(0)}{(p'(0))^2} \right) + 3(p(0))^{-\frac{5}{2}} p'(0)}{p'(0)}$$

이므로, 계산하면

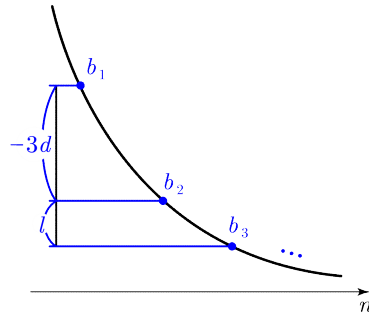
$$\frac{18 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) + 3 \times 3}{3} = 5$$

임을 알 수 있다.

미적분 29

모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$ 에 대해 공비를 r 이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $b_1 > 0$, $0 < r < 1$ 임을 알 수 있다.

이때, 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때, $a_1 = b_1$, $a_4 = b_2$ 이므로 등비수열 $\{b_n\}$ 을 아래 그림과 같이 나타낼 수 있다.



위의 그림에서, b_1 , b_2 의 차는 $-3d$ 이다. 이때, b_3 , b_2 의 차를 l 이라 할 때, 조건 (나)에서 어떤 자연수 k 에 대하여 $a_k = b_3$ 이므로 어떤 자연수 m 에 대해 $l = -md$ 의 형태임을 알 수 있다.

이때, 등비수열 $\{b_n\}$ 은 수렴하므로 $b_1 - b_2 > b_2 - b_3$ 이다. 따라서, 가능한 자연수 m 의 값은 1 또는 2이다.

(i) $m = 1$ 인 경우

$m = 1$ 인 경우 b_2 , b_3 의 차는 $-d$ 이므로

$$b_3 = a_5 \rightarrow k = 5$$

임을 알 수 있다. 이때, $b_2 = b_3 - d$, $b_1 = b_3 - 4d$ 이므로 등비중항의 성질에 의해

$$(b_2)^2 = b_1 \times b_3 \rightarrow (b_3 - d)^2 = b_3 \times (b_3 - 4d) \rightarrow b_3 = -\frac{d}{2}$$

이 되어 $b_1 = a_1 = -\frac{9}{2}d$, $b_2 = a_4 = -\frac{3}{2}d$ 이고, $r = \frac{1}{3}$ 임을 알 수 있다. 이때, 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이므로 d 는 짝수인 음의 정수이다.

1) $-d$ 가 4의 배수의 형태라면, 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 값은 짝수이고, $-d$ 를 4로 나눈 나머지가 2라면 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 값은 홀수이다.

2) 모든 자연수 n 에 대해 수열 $\{a_n\}$ 이 홀수라면, $\cos(a_n\pi) = -1$ 이고, 수열 $\{a_n\}$ 이 짝수라면, $\cos(a_n\pi) = 1$ 이다.

d 가 짝수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 는 a_1 과 홀짝성이 동일하다. ¹⁾

따라서, 모든 자연수 n 에 대해

$$\cos(a_n\pi) = (-1)^{a_n} = (-1)^{a_1}$$

로 표현할 수 있으므로 ²⁾ 이를 주어진 급수에 대입하면

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(a_n\pi)) \right| = \left| (-1)^{a_1} \frac{-\frac{9}{2}d}{1 - \frac{1}{3}} \right| = -\frac{27}{4}d$$

이고, d 는 짝수인 음의 정수이므로, 이 값은 $d = -2$ 일 때 최솟값 $\frac{27}{2}$ 를 가진다.

(ii) $m = 2$ 인 경우

$m = 2$ 인 경우 b_2, b_3 의 차는 $-2d$ 이므로

$$b_3 = a_6 \rightarrow k = 6$$

임을 알 수 있다. 이때, $b_2 = b_3 - 2d$, $b_1 = b_3 - 5d$ 이므로 등비중항의 성질에 의해

$$(b_2)^2 = b_1 \times b_3 \rightarrow (b_3 - 2d)^2 = b_3 \times (b_3 - 5d) \rightarrow b_3 = -4d$$

가 되어 $b_1 = a_1 = -9d$, $b_2 = a_4 = -6d$ 이고, $r = \frac{2}{3}$ 임을 알 수 있다. 이때, 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이므로 d 는 음의 정수이다.

① : d 가 홀수인 음의 정수일 때

d 가 홀수인 음의 정수일 때, a_{2n-1} 은 홀수, a_{2n} 은 짝수이므로

$$\cos(a_{2n-1}\pi) = -1, \cos(a_{2n}\pi) = 1$$

임을 알 수 있다. 따라서, 이를 주어진 급수에 대입하면

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(a_n\pi)) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times b_n \right| = \left| \frac{-9d}{1 + \frac{2}{3}} \right| = -\frac{27}{5}d$$

이고, d 는 홀수인 음의 정수이므로, 이 값은 $d = -1$ 일 때 최솟값 $\frac{27}{5}$ 를 가진다.

② : d 가 짝수인 음의 정수일 때

d 가 짝수인 음의 정수일 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 모두 짝수이므로

$$\cos(a_n) = 1$$

임을 알 수 있다. 따라서, 이를 주어진 급수에 대입하면

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(a_n \pi)) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| = \left| \frac{-9d}{1 - \frac{2}{3}} \right| = -27d$$

이고, d 는 짝수인 음의 정수이므로, 이 값은 $d = -2$ 일 때 최솟값 54를 가진다.

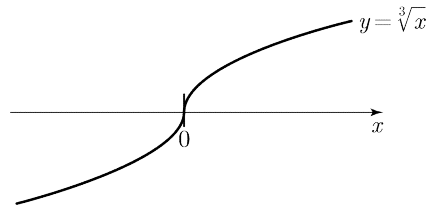
따라서, 급수 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(a_n \pi)) \right|$ 의 최솟값은 $\frac{27}{5}$ 이므로 $m = \frac{27}{5}$ 이고

$$10 \times m = 10 \times \frac{27}{5} = 54 \text{임을 알 수 있다.}$$

미적분 30

주어진 함수 $g(x) = \sqrt[3]{x(f(x))^2}$ 는 곱함수 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 에 속함수 $y = x(f(x))^2$ 가 합성된 합성함수의 형태로 바라볼 수 있다.

$h(x) = x(f(x))^2$ 라 할 때, 곱함수 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.



함수 $g(x)$ 가 미분가능하려면 방정식 $h(x)=0$ 을 만족하는 지점에 대해 함수 $h(x)$ 는 삼중근 이상을 가져야 한다.

1) 만약 함수 $f(x)$ 가 인수 x 를 가지지 않는다면 극한식

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}(f(x))^{\frac{2}{3}}}{x}$$

의 값이 존재하지 않으므로

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

2) 이차방정식 $p(x)=0$ 이 $x=\alpha$ 에서 중근을 가진다면, 속함수 $y = x(f(x))^2$ 는 $x=\alpha$ 에서 사중근을 가지므로 미분가능하다.

3) 증가함수에 감소함수를 합성하면 감소하고, 증가함수에 증가함수를 합성하면 증가한다.

따라서, 곱함수가 증가함수인 경우, 합성한 함수는 속함수의 증감과 일치한다.

이때, 함수 $h(x)$ 는 x 를 인수로 가지므로, $f(x)$ 또한 x 를 인수로 가져야만 한다. ¹⁾ 따라서, 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $p(x)$ 에 대해, $f(x) = xp(x)$ 라 하자.

만약, 방정식 $p(x)=0$ 이 실근 α 를 가지고, 함수 $p(x)$ 가 인수 $(x-\alpha)$ 를 하나만 가진다면, 함수 $h(x)$ 는 인수 $(x-\alpha)$ 를 2개 가지므로 함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서, 이차함수 $p(x)$ 의 판별식의 부호는 0 보다 작거나 같다. ²⁾

곱함수 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이므로, 합성함수 $g(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값은 속함수 $h(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값과 일치한다. ³⁾

함수 $h(x)$ 를 미분하면

$$h'(x) = 3x^2(p(x))^2 + 2x^3p(x)p'(x) = x^2p(x)\{3p(x) + 2xp'(x)\}$$

이고, 실수 전체의 집합에서 $x^2p(x) \geq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 가 극값을 가지는 지점인 $x = \frac{19}{7}$, $x=3$ 은 방정식 $3p(x) + 2xp'(x) = 0$ 의 실근이다.

$p(x)=x^2+ax+b$ 라 할 때 이를 방정식 $3p(x)+2xp'(x)=0$ 에 대입하면

$$3p(x)+2xp'(x)=0 \rightarrow 7x^2+5ax+3b=0$$

이므로 근과 계수 사이의 관계에 의해

$$-\frac{5a}{7}=\frac{19}{7}+3 \rightarrow a=-8, \quad \frac{3b}{7}=\frac{19}{7} \times 3 \rightarrow b=19$$

가 되어, $f(x)=xp(x)=x(x^2-8x+19)$ 임을 알 수 있다. 따라서, $f(5)=20$ 이다.

답 20