Ex 1

두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \le -1) \\ 2^{-x+a}+b & (x > -1) \end{cases}$$

가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 오직 한 점에서만 만나도록 하는 실수 t의 개수가 1일 때, $a \times b$의 값은?

Ex 2

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2^{x+1}+3 & (x < 0) \\ -2^{-x+a}+b & (x \ge 0) \end{cases}$$

의 치역이 $\{y \mid 1 < y < 5\}$일 때, 모든 $a+b$의 값의 범위는?

지수·로그함수 그래프의 개형추론

Ex 1

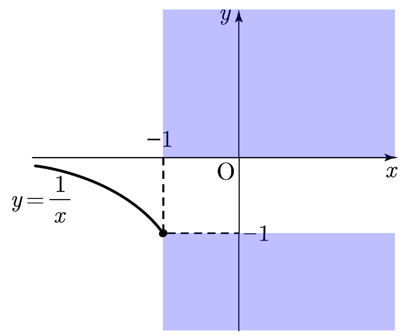
두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \le -1) \\ 2^{-x+a}+b & (x > -1) \end{cases}$$

가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 오직 한 점에서만 만나도록 하는 실수 t의 개수가 1일 때, $a\times b$의 값은?

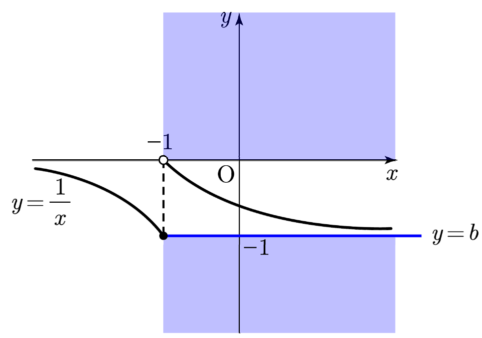
★풀이

먼저 $x \le -1$에서 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$를 그려보면 아래와 같다.



이때 주어진 조건을 만족하려면 위 그림에서 색칠된 부분에 곡선 $y=2^{-x+a}+b$가 존재하면 안 된다.[1] 따라서 곡선 $y=2^{-x+a}+b$의 그래프는 아래와 같이 그려져야 한다.

1) 만약 그렇게 되면, 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=t$와 만나는 개수가 1이 되는 순간이 무한개 존재하게 된다.



즉, $b=-1$이고, 곡선 $y=2^{-x+a}+b$는 $(-1, 0)$을 지나야 하므로 $2^{1+a}-1=0$에서 $a=-1$임을 알 수 있다. 따라서 $ab=1$이다.

★답 1

Ex 2

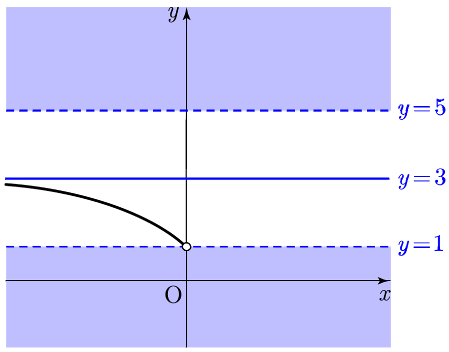
두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2^{x+1}+3 & (x<0) \\ -2^{-x+a}+b & (x\geq 0) \end{cases}$$

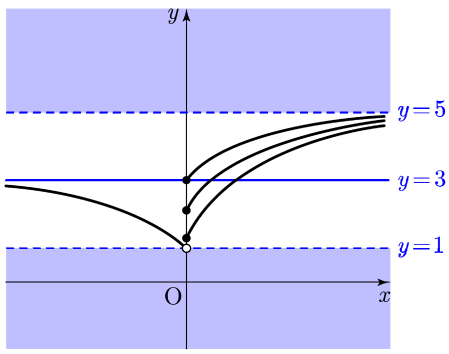
의 치역이 $\{y\,|\,1<y<5\}$ 일 때, 모든 $a+b$의 값의 범위는?

★풀이

먼저 $x<0$에서 곡선 $y=-2^{x+1}+3$을 그려보면 아래와 같다.



이때 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y\,|\,1<y<5\}$ 임을 만족하기 위해서는 색칠된 부분에 곡선 $y=-2^{-x+a}+b$가 존재하면 안 된다. 따라서 곡선 $y=-2^{-x+a}+b$의 치역은 $\{y\,|\,3\leq y<5\}$가 되어야 하므로 아래와 같이 그려져야 한다.



즉, $b=5$이고, 곡선 $y=-2^{-x+a}+5$는 $x=0$에서의 함숫값 -2^a+5의 범위는 $1<-2^a+5\leq 3$ 이므로 a의 범위는

$$1<-2^a+5\leq 3 \;\Rightarrow\; -4<-2^a\leq -2 \;\Rightarrow\; 1\leq a<2$$

이므로 $a+b$의 범위는 $6\leq a+b<7$이다.

★답 $6\leq a+b<7$