

『포셋 1주차』

정오표

학습에 불편을 드려 죄송합니다. 최대한 빠르게 정오표를 반영하도록 하겠습니다.

초판본 정오(26.08.30 확인)

위치	
6set 94p 각주 1,2번	절댓값 함수의 미분가능성과 좌우 미분계수에 대한 설명 추가

|21번| 경향 분석

경향 분석 → 실전 개념 → 다정복스 문항

21번 문제는 최근 가장 핫한 토픽인

극한의 존재성을 묻는 킬러 문제

로 출제되었다. 보통 이런 문제들은

모든 실수 a 에 대하여 극한 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 존재한다.

와 같은 발문으로 출제되는데, 작년 수능 문제는 최근 평가원이 자주 출제하는 부호 판단과 정수, 자연수 조건이 결합되어 출제되었다.

[작년 수능]

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m 의 집합은 $\left\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\right\}$ 이다.

$g(-5)$ 의 값을 구하시오. (단, $g(-1) \neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 존재한다.

→ $g(0) = g(2) = 0$ 이므로 $f(0) = f(2) = 0$ 이어야 함을 생각할 수 있어야 해!

(나) $\lim_{x \rightarrow m+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m 의 집합은 $\left\{g(-1), -\frac{7}{2}g(1)\right\}$ 이다.

→ 분모가 0으로 갈 때와 0으로 가지 않을 때를 판단할 수 있어야 해!

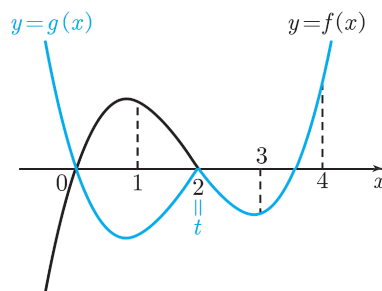
또한 $g(-1)$ 과 $-\frac{7}{2}g(1)$ 이 자연수이므로

$g(-1)$ 은 양수, $g(1)$ 은 음수임도 알 수 있어.

이때 (나) 조건에서 분모가 0이 되지 않는 경우는 단순히 분모와 분자의 부호만 비교하면 되는데, 분모가 0이 되는 경우는

$m = 2$ 일 때 → $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 부호 : $g(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 우미분계수의 부호!

임을 생각할 수 있어야 했다. 이때 (나) 조건의 극한값이 음수가 되도록 하는 자연수 m 이 두 개뿐이므로 아래 그림과 같은 상황이 되어야 했다.



함수가 미분가능하지 않을 때 한쪽 미분계수를 따지는 주제는 작년 6월 평가원에서 이미 출제된 바 있다.

[작년 6월 평가원]

15. 상수 k 와 $f'(0) = 6$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + k & (|x| > 1) \\ -f(x) & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ 의 값이

존재하고 그 값은 0 이하이다.

(나) x 에 대한 방정식 $g(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 최댓값은 13이다.

- ① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ 의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.

→ $|x| \neq 1$ 인 점에서는 $g(x)$ 가 미분가능하므로 $|a| \neq 1$ 이면 $g'(a) \leq 0$ 이어야 해.

→ 즉 $|x| > 1$ 에서는 $f'(x) \leq 0$ 이고, $|x| < 1$ 에서는 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 $f'(x) = p(x+1)(x-1)$ 이어야 하고, $f'(0) = 6$ 임을 이용하면 $f'(x) = -6(x+1)(x-1)$ 이어야 해.

→ 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ 의 값이 존재하므로, 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = g(a)$ 여야 해. 따라서 $x = -1$ 에서는 $g(x)$ 가 불연속이어도 되는데, **$x = 1$ 에서는 $g(x)$ 가 연속이어야 한다는 점**이 문제의 핵심 포인트였어.

(반대로 $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ 의 값이 존재해야 하면 $x = -1$ 에서 연속이어야 하겠지?)

이번 3월 모의고사에서도 함수가 미분가능하지 않을 때 한쪽 미분계수를 묻는 문항이 나올 수 있으니,

한쪽 미분계수에 대한 개념을 제대로 공부해 보고 직접 문제를 풀어보도록 하자.

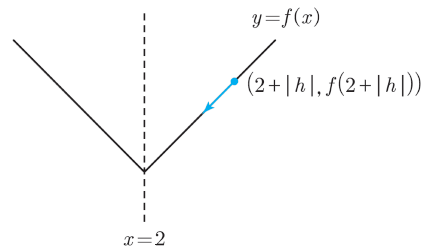
한쪽 미분계수★

아래 극한 식을 보자.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+|h|) - f(2)}{|h|}$$

분명 형태는 앞에서 배운 미분계수의 정의와 비슷한데, 사실 이는 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 우미분계수를 의미한다.

왜냐하면 $|h|$ 를 보면 $h \rightarrow 0+$ 일 때와 $h \rightarrow 0-$ 일 때 모두 양수이므로 아래 그림과 같이 $x=2$ 를 기준으로 $x=2$ 의 우측에서만 다가오게 된다.



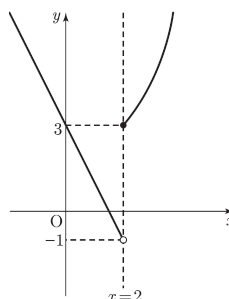
따라서 함수 $f(x)$ 에 대해 $x=2$ 를 향해 **오른쪽에서 다가가는 우미분계수**라고 해석할 수 있다. 아래 예시를 풀어보며 우미분계수에 대한 감각을 익혀보자. ¹⁾

1) 이 문제를 보며 눈치챘을지는 모르겠지만 신기하게도 함수는 불연속이어도 좌미분계수나 우미분계수는 존재할 수 있다.

Ex 함수 $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & (x < 2) \\ x^3-3x+1 & (x \geq 2) \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+|h|) - f(2)}{|h|}$ 의 값을 구하시오.

우선 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그려보면



위와 같이 그려지고, 앞서 배웠다시피 극한 식 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+|h|) - f(2)}{|h|}$ 는 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 우미분계수를 의미하므로 함수 x^3-3x+1 을 x 에 대해 미분하고 x 에 2를 대입한 값인 9가 된다.

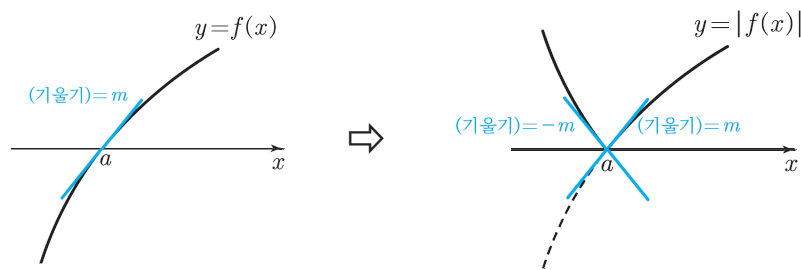


주다 6주차 Day2 – 절댓값 함수의 좌·우미분계수

경향 분석 → 실전 개념 → 다정복스 문항

절댓값 함수의 좌·우미분계수 ★

다들 알고 있겠지만, 함수 $f(x)$ 에 대하여 $|f(x)|$ 의 그래프는 $f(x)$ 의 그래프 중 x 축 보다 아래 있는 부분을 x 축을 기준으로 뒤집어 올리면 된다. 그 과정에서 미분계수는 부호가 변하게 되는데, 이를 그림으로 표현하면 아래와 같다.



이때 위 그림과 같이 $|f(x)|$ 의 $x=a$ 에서의 좌·우미분계수는 **절댓값은 같고 부호만 다른데**, 이는 꽤나 매력적인 출제 포인트일 수 있다. 예를 들어 아래 문제를 같이 풀어보자.

Q 함수 $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = 0$$

을 만족하는 실수 t 의 값의 합을 구하시오.

★풀이 결국 구하라고 하는 상황은 함수 $f(x)$ 에 대하여 $x=t$ 일 때의 좌미분계수와 우미분계수의 합이 0이 될 때를 구하라는 거고 이는 곧, $f'(t+) = -f'(t-)$ 인 t 의 값을 구하라는 것과 같다. 이제 두 가지 경우로 나누어 t 의 값을 구해보자.

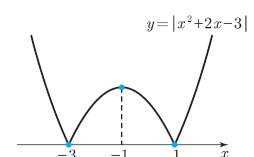
① 함수 $f(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능할 때
이 경우에는 함수 $f(x)$ 의 $x=t$ 에서의 좌·우미분계수가 동일하므로 $f'(t+) = f'(t-) = f'(t)$ 이다. 따라서 구해야 하는 상황은

$$f'(t+) = -f'(t-) \Rightarrow f'(t) = -f'(t) \Rightarrow f'(t) = 0 \therefore t = -1$$

② 함수 $f(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능하지 않을 때
좌·우미분계수의 크기는 같고 부호가 반대인 상황을 찾아주면 된다.
 $\therefore t = -3, t = 1$

따라서 정답은 -3 이다. ¹⁾

1) 이해를 돕기 위해 그래프를 그려주면 아래와 같다.



주다 6주차 Day2 – 절댓값 함수의 좌·우미분계수

경향 분석 → 실전 개념 → 다정복스 문항

Ex 1

함수 $f(x) = |x^2 - 4|$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} + k$$

을 만족시키는 상수 k 의 값은?

Ex 2

함수 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \leq 0$$

을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 곱은?



주다 6주차 Day2 – 절댓값 함수의 좌 · 우미분계수

경향 분석 → 실전 개념 → 다정복소 문항

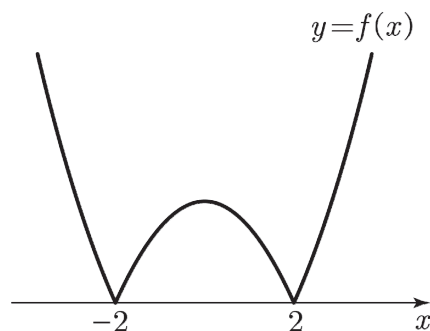
Ex 1

함수 $f(x) = |x^2 - 4|$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} + k$$

을 만족시키는 상수 k 의 값은?

★ 풀이

먼저 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그려보자.

$x = 2$ 에서 절댓값함수 $f(x)$ 와 x 축이 만나므로 $x = 2$ 에서의 좌 · 우미분계수는 절댓값만 같고 부호가 다른 상황이다. 이때, $x = 2$ 에서의 우미분계수를 구해보면,

$$x^2 - 4 \text{를 } x \text{에 대하여 미분하고 } x \text{에 } 2 \text{를 대입} \Rightarrow 4$$

이다. 따라서 $x = 2$ 에서의 좌미분계수는 4와 절댓값이 같고 부호만 다른 -4 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} + k \Rightarrow 4 = -4 + k$$

$$\Rightarrow k = 8$$

이다.

★답 8

주다 6주차 Day2 – 절댓값 함수의 좌·우미분계수

경향 분석 → 실전 개념 → 다정복소 문항

Ex 2

함수 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \leq 0$$

을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 곱은?

★ 풀이

우선, $|f(x)| = g(x)$ 라 치환하면, 우리가 다루기 쉬운 형태의 식인

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \leq 0$$

이 된다. 각 식의 꼴이 $x = a$ 에서의 좌·우미분계수의 형태인데,

$$(\text{우미분계수}) \times (\text{좌미분계수}) \leq 0$$

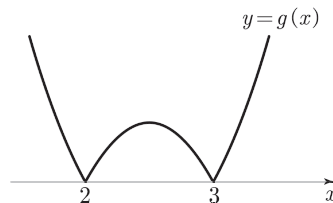
를 만족하는 경우는

1. 좌·우미분계수의 부호가 다를 때
2. 둘 중 하나가 0 일 때

이다. 이때 만약 함수 $g(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하다면 좌우 미분계수가 같으므로 곱하면 반드시 0 이상이다. 따라서 경우 1, 2를 만족하려면

1. 미분가능하지 않다.
2. 좌미분계수 또는 우미분계수 중 하나 이상이 0

이어야 한다. 이제 함수 $g(x)$ 의 그래프를 그려 판단해 보면,



1. 미분가능하지 않다 $\Rightarrow x = 2, x = 3$
2. 미분계수가 0 일 때 $\Rightarrow x = \frac{5}{2}$

이므로 모든 실수 a 의 곱은 15 이다.

★ 답 15



주다 보러가기

|21번| 3모 대비 다정복스 문항

경향 분석 → 실전 개념 → 다정복스 문항

이제 어느 정도 연습이 끝났다면, 실제 문제를 풀어보자.

18 [주다 6주차 Day2 4번]

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x & (|x| > 1) \\ f(x) & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ 의 값이 존재하고, 최솟값은 -5 이다.

19 [일정 4회 21번]

자연수 m 에 대하여 함수 $f(x) = (x-1)(x-4)(x-m)$ 이 있다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h}$$

라 할 때, 집합 $A = \{x | f'(x) = g(x), x \text{ 는 실수}\}$ 와 두 정수 a, b 에 대하여

$$\{x | x \geq a\} \subset A \subset \{x | x \geq b\}$$

를 만족시키는 $a-b$ 의 최솟값이 6 이다. $f(m+1)$ 의 값을 구하시오. [4점] ¹⁾

1) 이 문제는 작년에 출시된
[일정 : 일등급 정복하기]의
문항이다.

신기하게도 작년 수능 문제와
본질이 상당 부분 유사한데,
실제로 시험장에서 이 문제가
생각나서 수능 21번을 맞췄다는
후기가 있다.



[해설 QR코드]