

『기출백 수2 시즌2』

정오표

학습에 불편을 드려 죄송합니다. 최대한 빠르게 정오표를 반영하도록 하겠습니다.

초판본 정오(26.09.05 확인)

위치	수정 전	수정 후
본문 33p	중간에 설명이 끊겨 있습니다. 정오표 2p를 참고해 주세요.	
본문 38p No. 98 문항 선지	① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13	① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3
본문 42p (극소의 정의 박스)	함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함한 어떤 열린구간에 속하는 ~~	함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함한 어떤 열린구간 ¹⁾ 에 속하는 ~~
본문 185p 이후	문제_03과 문제_04가 누락되었습니다. 정오표 3p를 참고해주세요.	
해설 41p - 42p	해설이 2단계에서 끝납니다. 정오표 4p를 참고해 주세요.	

다항함수의 증가·감소 극대·극소 최대·최소

1 테마 소개 2 3점 3 4점 초반 4 4점 중반 5 4점 후반 6 킬러

다항함수의 증가·감소 극대·극소 최대·최소

이번 테마는 삼차 또는 사차함수를 이용하여 증감에 대한 조건을 주거나 극대, 극소의 개수나 그 값을 주는 등 다양한 상황을 의미한다.

이 테마는 단독으로 나온다면, 보통 문제에서 특정 조건을 만족하도록 하는 다항함수의 개형을 추론해 가는 과정으로 출제되고 보통 어렵게 나오는 편은 아니다.

증가·감소, 극대·극소, 최대·최소를 판단하는 가장 기본적인 방법은 도함수의 부호를 이용하는 것이지만, 삼사차함수의 개형은 이미 알고 있고, 적당히 비율관계를 이용하면 더 쉽게 풀 수 있는 경우도 많다. 개념이 중요하다기 보다는 문제를 풀어보며 개형 추론을 연습해 보는 것이 훨씬 더 중요하므로 잠깐 내용을 정리해 보고 바로 문제를 풀어보자.

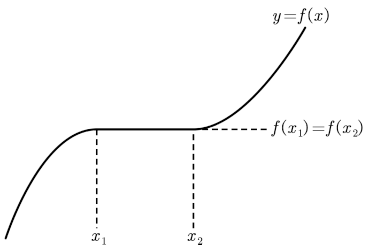
함수의 증·감은 도함수의 부호를 통해 판단하면 된다. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

- ① $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 (증가 or 감소)한다.
⇒ 구간 $[a, b]$ 에서 $f'(x) \geq 0$ or $f'(x) \leq 0$
- ② $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극대 or 극소를 갖는다.
⇒ $f'(x)$ 는 $x = a$ 에서 부호가 (+) → (-) or (-) → (+)로 변한다.

이때 ①에서 역은 성립하지 않는 것은 주의하자. 이유는 아래 박스를 참고하자.

상수 구간이 있는 함수

"함수 $f(x)$ 가 증가한다."라는 조건은 " $f'(x) \geq 0$ "라는 조건과 필요충분 관계에 있는 것은 아니다. 예를 들어 $f'(x) \geq 0$ 을 만족하는 함수라도 아래 그림처럼 상수 구간이 있으면 증가하지 않을 수도 있기 때문이다.



$x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) = f(x_2)$ 인 x_1, x_2 가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 증가 함수가 아님¹⁾

하지만, 다행스럽게도 상수함수가 아닌 다항함수라면 위와 같은 상황은 존재하지 않고, 실제 출제된 기출문제도 없다. 따라서 수학II 과목의 대부분의 문제는 "함수 $f(x)$ 가 증가한다"라는 조건을 $f'(x) \geq 0$ 로 해석해도 큰 문제 없다.

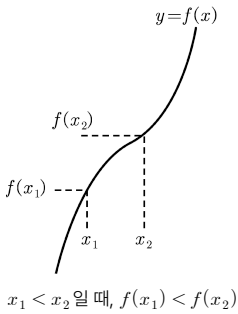
1) 증가, 감소의 정의는 엄밀하게 알아놓는 것이 좋다.

<증가의 정의>

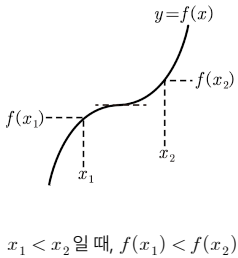
어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다.

교과서에 적힌 표현을 그대로 가져온 것이다. 수식이 있어 이해하기 어려울 수 있는데 쉽게 말하면 x 값이 커질 때, 함수값도 커지면 된다는 뜻이다. 아래 예시를 보며 느껴보자.

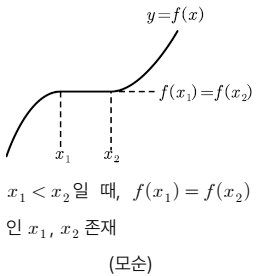
Ex 1.



Ex 2.



Ex 3.



속도와 가속도 움직임 이해하기

1 테마 소개 } 2 3점 } 3 4점 초반 } 4 4점 중반 } 5 4점 후반 } 6 킬러

/ 문제_03

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 t ($t \geq 0$) 에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q 의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q 의 가속도를 각각 p, q 라 할 때, $p - q$ 의 값은?

- ① 24
- ② 27
- ③ 30
- ④ 33
- ⑤ 36

출처_2025학년도 9월 11번

답 ①

/ 문제_04

시각 $t = 0$ 일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t ($t \geq 0$) 에서의 위치 x 가

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

이다. 출발한 후 점 P 의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P 의 가속도는?

- ① 6
- ② 9
- ③ 12
- ④ 15
- ⑤ 18

출처_2025학년도 수능 11번

답 ②

절댓값 함수의 극대 · 극소

1 만점자의 생각 2 해설

추가문제 - 수2 시즌1 83번 출처_2015년 7월 A형 21번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여
함수 $g(x) = |f(x)|$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 1 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하고, $g(1)=g'(1)$ 이다.
- (나) 2 3 $g(x)$ 는 $x=-1, x=0, x=1$ 에서 극솟값을
 갖는다.

$g(2)$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

만점자의 생각 실제 수능 만점자가 문제를 읽고 하는 생각

함수 $g(x) = |f(x)|$
⇒ 먼저 $g(x)$ 가 절댓값 함수인 건 OK. 그런데 $f(x)$ 가 최고차항 계수만 주어진 사차함수인데, 거기에 절댓값까지 씌워서 개형을 예측할 수가 없네. 박스 조건을 봐야겠어!

1 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하고, $g(1)=g'(1)$ 이다.

⇒ $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미가인 경우는 절댓값 함수의 미가성에 의해

1. $f(1) \neq 0$ 인 경우
2. $f(1) = 0$ 이고, $f'(1) = 0$ 인 경우

의 두 가지뿐이야. 그런데 $g(1)=g'(1)$ 조건으로는 두 경우 중 어떤 경우인지 알 수가 없으니 다음 조건을 봐야겠어.

2 $g(x)$ 는 $x=-1, x=0, x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

⇒ 일단 $g(x)$ 가 세 점에서 극솟값을 갖네. 원래 사차함수는 많아야 두 점에서만 극소를 가질 텐데...

아! $g(x)$ 의 그래프에서 $f(x)$ 가 뒤집히는 부분이 있다는 거구나!

그런데 아까 (가) 조건에서 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미가라고 했으니

$g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값을 가짐 ⇒ $g'(1)=0$

인 것도 놓치면 안 되겠네. 이제야 (가) 조건의 $g(1)=g'(1)$ 조건이

$$g(1)=g'(1)=0 \Rightarrow g(1)=0 \Rightarrow f(1)=0$$

을 의미하는 조건인 것을 알겠다. 당연히 절댓값 함수의 미가성에 의해

$$f(1)=0, f'(1)=0 \Rightarrow f(x) \text{는 } (x-1)^2 \text{을 인수로 가짐}$$

인 것까지 OK.

3 $g(x)$ 는 $x=-1, x=0, x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

⇒ 이제 어느 정도 조건을 뽑아냈으니, 실제로 이 점들에서 극소를 갖는 $g(x)$ 의 개형을 찾아봐야겠어. 직접 그래프를 그려서 판단하는 수밖에 없을 것 같아.



절댓값 함수의 극대 · 극소

1 만점자의 생각 } 2 해설

추가문제_해설

❶ $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하고, $g(1)=g'(1)$ 이다.

⇒ $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미가인 경우는 **절댓값 함수의 미가성**에 의해 $f(1) \neq 0$ 인 경우,
 $f(1)=f'(1)=0$ 인 경우의 두 가지뿐이야.

1단계 (가) 조건 해석하기

먼저 (가) 조건을 해석하자. $g(x)$ 는 원함수가 $f(x)$ 인 **절댓값 함수**이므로, 이 함수가 $x=1$ 에서 미가하려면 아래 두 가지 경우

1. $f(1) \neq 0$ 인 경우
2. $f(1)=0, f'(1)=0$ 인 경우

중 하나를 만족시켜야 한다. 뒤에 주어진 $g(1)=g'(1)$ 조건으로는 두 경우 중 어떤 경우인지 알 수 없으니 일단 넘어가자.

❷ $g(x)$ 는 $x=-1, x=0, x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

⇒ 일단 $g(x)$ 가 세 점에서 극솟값을 갖네. 원래 사차함수는 많아야 두 점에서만 극소를 가질 텐데...

2단계 극소점이 세 개일 조건 살펴보기

(나) 조건을 해석해 보자. 일단 $g(x)$ 의 극소점이

$$x=-1, x=0, x=1$$

로 총 3개인 것을 알 수 있다. 그런데 $g(x)$ 의 원함수인 $f(x)$ 는 사차함수이므로, 많아야 두 점에서만 극소를 가질 수 있다. 이는 **$g(x)$ 의 그래프에 $f(x)$ 가 뒤집히는 부분, 즉 $f(x) < 0$ 인 부분이 존재함**을 의미한다. ¹⁾ ... ㉠

그런데 위 세 점들 중에서, (가) 조건에서 한 번 언급한 $x=1$ 이 포함되어 있다. 이를 이용하면

$$g(x) \text{ 가 } x=1 \text{ 에서 미가, } g(x) \text{ 가 } x=1 \text{ 에서 극소} \Rightarrow g'(1)=0$$

임을 바로 알 수 있다. ²⁾ 따라서

$$g(1)=g'(1)=0 \Rightarrow f(1)=0$$

이고, 이 점에서 $g(x)$ 가 미가이므로 **절댓값 함수의 미분가능성**에 의해 $f'(1)=0$ 임도 알 수 있다. 따라서 $f(x)$ 는 $(x-1)^2$ 을 인수로 가진다. ... ㉡

1) 원함수인 $f(x)$ 의 극소점 개수보다 절댓값 함수인 $g(x)$ 의 극소점 개수가 많다는 것은 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다른 부분, 즉 $f(x)$ 가 뒤집히는 부분이 존재한다는 것이다.

2) 명제

$f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

는 $f(x)$ 가 미분가능한 함수면 항상 성립한다.

절댓값 함수의 미분가능성

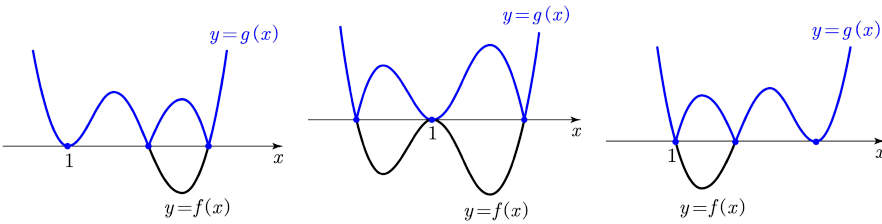
1 만점자의 생각 } 2 해설

3 $g(x)$ 는 $x = -1, x = 0, x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

⇒ 이제 어느 정도 조건을 뽑아냈으니, 실제로 이 점들에서 극소를 갖는 $g(x)$ 의 개형을 찾아봐야겠어. 직접 그래프를 그려서 판단하는 수밖에 없을 것 같아.

3단계 실제로 조건을 만족하는 개형 찾아보기

이제 ㉠, ㉡을 생각하면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 개형이 $x = 1$ 의 위치에 따라 세 가지로 추려진다.



위 개형을 관찰하다 보면 공통점을 찾을 수 있는데, 바로

$g(x)$ 의 극소점은 방정식 $f(x) = 0$ 의 근

이라는 것이다.¹⁾ 따라서 $g(x)$ 가 $x = -1, x = 0$ 에서도 극소가 되려면 $f(-1) = f(0) = 0$ 이어야 한다.

마무리 $g(2)$ 의 값 계산하기

이제 $f(x)$ 의 식을 구해보자. 위에서 구한 것들을 종합하면

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0, f'(1) = 0 \Rightarrow f(x) = (x+1)x(x-1)^2$$

임을 알 수 있고, 따라서 $g(2) = |f(2)| = 6$ 이다.

답 ③

1) 함수 $g(x)$ 가 미분인 점에서도 극소일 수 있다. 자세한 내용은 Feed Back을 참고하자.

Feedback _ 미분점에서도 극값을 가질 수 있나요?

학생들이 갖는 흔한 오개념 중 하나가, '미분가능하지 않은 함수는 극값을 가질 수 없다'는 것이다. 이는 틀렸다. 극소의 엄밀한 정의는

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\Leftrightarrow x = a \text{를 포함하는 어떤 열린 구간에서 } f(x) \geq f(a)$$

이고, 보다시피 $f(x)$ 의 미분가능성과는 관련이 전혀 없다. 이러한 오개념을 갖고 있었다면 이번 기회에 정확히 짚고 넘어가야 한다.