점화식과 친해지기

기본적인 점화식[1] 문제는 특별한 개념이 필요하지 않다. 사칙연산과 나열만 꿋꿋이 할 수 있다면 7등급 학생도 문제를 풀 수 있다. 하지만 **점화식을 효과적으로 나열하는 방법**을 연습한 학생은 압도적으로 나열을 빨리할 수 있으므로, 이번 챕터부터 점화식과 친해지며 효과적인 나열 방법을 배워볼 것이다.

우선 아래 문제를 보자.

Q 모든 자연수 n에 대하여 다음 점화식을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이 식만으로 $\{a_n\}$의 모든 항의 값을 알 수 있을까?

답은 당연히 **'아니오'**이다. 위 식은 a_n의 값을 통해 a_{n+1}의 값이 결정되는 구조이므로, 이전 항의 값을 모르면 다음 항의 값도 알 수 없다.

그런데 만약 위 점화식에 **$a_1=1$ 이라는 조건이 추가**된다면, 이제는 $\{a_n\}$의 모든 항의 값을 알 수 있다.

$n=1$ 대입 → 1은 홀수이므로 $a_2=a_1+1=2$

$n=2$ 대입 → 2는 짝수이므로 $a_3=\dfrac{a_2}{2}=1$

$n=3$ 대입 → 3은 홀수이므로 $a_4=a_3+1=2$

⋮

와 같이 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 대입해 보며 관찰하면, a_1으로부터 연쇄적으로 $\{a_n\}$의 모든 항의 값을 알 수 있기 때문이다.[2] 위 결과로부터 우리는

"$a_{n+1}=(a_n$에 대한 식$)$ 꼴의 점화식에서 a_n의 모든 항을 결정하려면 a_1의 값이 필요하구나!"

라는 것을 알 수 있다.

1) 점화식이란 각각의 항들의 관계를 나타낸 식을 의미한다. 예를 들면 아래와 같다.

$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2$
$b_1=2,\ b_{n+1}=2b_n$

이때 점화식만 준 문항은 $a_n=2n+1$과 같이 일반항을 주었을 때보다 해결하기 까다롭다. 만약 a_3을 구하고 싶다면

$a_n=2n+1$
$\rightarrow n=3$ 대입

으로 끝나지만, 점화식은 직접 나열해 봐야 하기 때문이다.

2) 만약 우리가 a_n을 알고 있으면 이를 그대로 점화식에 대입해서 a_{n+1}을 알 수 있다. 즉,

a_1을 알고 있으므로 a_2도 알 수 있고,

a_2를 알고 있으므로 a_3도 알 수 있고, $\cdots$.

이와 같이 도미노처럼 a_1 하나만으로 a_n의 모든 항의 값을 알 수 있다.

그렇다면 a_1 만 알면 항상 모든 항을 알 수 있을까? 다음 질문을 생각해 보자.

> **Q** 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 의 점화식이 다음과 같이 주어져 있다.
>
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_{n+1} & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
>
> $a_1 = 1$ 일 때, a_7 의 값을 구할 수 있을까?

위 점화식에 아까 했던 대로 $n = 1,\ 2,\ \cdots$ 를 대입해 보면

$n = 1$ 대입 → 1 은 홀수이므로 $a_3 = a_2 + a_1 = a_2 + 1$

$n = 2$ 대입 → 2 는 짝수이므로 $a_4 = 2a_3 = 2a_2 + 2$

$\vdots$

이다. 따라서 a_2 의 값을 알아야 $a_3,\ a_4,\ \cdots$ 의 값도 결정할 수 있기에 위 점화식은 반드시 **두 개의 항** $a_1,\ a_2$ 를 알아야만 모든 항을 알 수 있다. [1)]

그렇다면 위 점화식에서 $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ 일 때, a_7 의 값을 직접 구해보면 어떤 값이 나올까? 아래 표를 직접 채워보자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3					

정답은 각주[2)] 에 있다. 만약 위 점화식을 나열할 때 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 직접 대입하며

"대입하기 너무 귀찮은데?"

라고 생각했다면 아직 효과적으로 나열하는 방법이 체화되지 않은 학생이다.
다음 장부터 **나열을 효과적으로 하는 방법**에 대해 배워보자.

1) 전 페이지의 각주와 마찬가지로 $a_n,\ a_{n+1}$ 을 알고 있으면 얘들을 그대로 점화식에 대입해서 a_{n+2} 를 알 수 있다. 즉,

$a_1,\ a_2$ 를 알고 있으므로 a_3 도 알 수 있고,

$a_2,\ a_3$ 을 알고 있으므로 a_4 도 알 수 있고, $\cdots$.

이와 같이 이전의 두 항을 이용해 a_n 의 모든 항이 연쇄적으로 결정된다.

2)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3	4	8	12	24	36

나열할 땐 자신만의 언어로 바꿔라

점화식을 이용한 문항들은 “나열”이라는 행위가 가장 중요하므로 나열할 때 최대한 **머리를 덜 쓸 수 있도록 미리 세팅**해 놓는 것이 좋다. 예를 들면

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n \text{ 이 자연수인 경우}) \\ a_n+6 & (\log_3 a_n \text{ 이 자연수가 아닌 경우})\end{cases}$$

위 점화식[1]에서

1) 2023년 7월 교육청 15번에 출제된 점화식이다.

$$(\log_3 a_n \text{ 이 자연수}) \rightarrow (a_n=3,\ 9,\ 27,\ \cdots)$$

로 읽을 수 있으므로

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}a_n & (a_n=3,\ 9,\ 27,\ \cdots) \\ a_n+6 & (\text{나머지})\end{cases}$$

라고 생각할 수 있고, 결국 정리하면

$$3,\ 9,\ 27,\ \cdots \text{ 이 나온다?} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ 곱한다}$$

$$\text{아니다?} \rightarrow 6 \text{ 더한다}$$

라고 **나만의 언어로 바꾸는 작업**이 가능하다. 이렇게 나만의 언어로 바꾸는 순간 나열의 속도는 압도적으로 빨라질 것이다. $a_1=21$ 이라 하고 직접 나열해 보자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
21[2]	27[3]					

2) 나열하며 머릿속에서

“3 의 거듭제곱이 아니잖아?”
“그러면 6 더하면 되겠네”

라고 생각하면 된다.

3) 이번엔 3 의 거듭제곱이 나왔으니

“$\frac{1}{3}$ 곱하면 되겠구나”

하면 된다.

a_3 부터 a_7 은 스스로 구해보자. 답은 각주[4]에 있다.

4)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
21	27	9	3	1	7	13

바꾼 언어를 머릿속에 입력하라

아래 문제를 보자.

Q 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 2\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 2\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_1=1$, $a_2=3$일 때, a_7의 값은?

우선 수형도를 그려보자.[1]

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3					

이제, **나만의 언어를 머릿속에 입력**해 보는 단계가 중요하다. 아래와 같이 말이다.

① 앞의 항이 2의 배수인지 본다.
② 2의 배수다? → 반으로 나누기,
　　아니다? → 앞 두 항 더하기

이제 이 정도로 머릿속에 입력시켰다면 수형도를 보며 하나씩 나열하면 된다. a_3부터 하나씩 나열해 보자.

a_3 : "$a_2=3$인데, 2의 배수 아니잖아. 바로 앞의 두 항 더하자."

↓

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3	4				

a_4 : "$a_3=4$인데, 2의 배수네? 그럼, 바로 앞에서 반 나누기!"

↓

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3	4	2			

나머지는 스스로 채워보자. 답은 각주[2]에 있다.

1) 수형도를 그리는 방식은 자신한테 제일 편한 방법을 찾으면 된다.

2)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3	4	2	1	3	4

Ex 1 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}a_n + n & (a_n \text{이 } 4\text{의 배수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{이 } 4\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시키고 $a_1 = 1$ 일 때, a_8 의 값은?

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1							

Ex 2 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2(a_n + a_{n+1}) & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

를 만족시키고 $a_1 = -2$, $a_2 = 3$ 일 때, a_7 의 값은?

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
-2	3					

Ex 3 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n \le 3) \\ 2a_n - 1 & (n \ge 4) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{6} a_k = 50$ 일 때, a_1 의 값은?

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

Ex 1 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{4}a_n+n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우})\\ a_n+n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시키고 $a_1=1$ 일 때, a_8 의 값은?

풀이 내 언어로 도식화해 보면

① 앞의 항이 4 의 배수다? → 4 나누고 n 더하기
② 앞의 항이 4 의 배수가 아니다? → 앞의 항이랑 n 더하기

인데, 앞의 항과 n 을 더하는 것은 수형도에서 아래와 같이 바로 계산할 수 있다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1 + 1	2						

또한, a_n 이 4 의 배수가 나오면 4 를 나누고 n 을 더하면 된다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	4 → 1 ($\div 4$) + 3	4				

마지막까지 진행하면 아래와 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	2	4	4	5	10	16	11

Ex 2 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2(a_n + a_{n+1}) & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

를 만족시키고 $a_1 = -2$, $a_2 = 3$일 때, a_7의 값은?

풀이 내 언어로 도식화해 보면

① 항[1] 이 커지거나 일정하다? → 두 항 더하고 2 곱하기
② 항이 작아진다? → 두 항 더하기

이므로 수형도를 모두 채우면 아래와 같다.[2]

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
-2	3	2	5	14	38	104

1) a_{n+2}의 이전 두 항인 a_n, a_{n+1}을 의미하는 것이다.

2) 참고로 a_3부터는 수열이 계속 증가하므로, a_5부터는 계속 ①의 경우를 따르게 된다.

Ex 3 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n \le 3) \\ 2a_n - 1 & (n \ge 4) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{6} a_k = 50$일 때, a_1의 값은?

풀이 내 언어로 도식화해 보면

a_4까지는 1씩 더하고[3], a_5부터는 전 항에서 2 곱하고 1 빼기

인데, a_1의 값을 알 수 없으므로 **미지수를 도입**하여 수형도를 모두 채우면 아래와 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	$2a+5$	$4a+9$

$\sum_{k=1}^{6} a_k = 10a + 20 = 50$이므로 $a = 3$이다. $\therefore\ a_1 = 3$

3) $a_{n+1} = a_n + 1$ $(n \le 3)$ 이라 a_4까지가 아닌 a_3까지 성립하는 규칙이라고 생각할 수 있는데,

$a_{n+1} = \cdots$

꼴의 등식이라 $n \le 3$이면 a_4까지 성립한다.

62

4점 중반

배경지식 p.06
해설 p.71

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{2}+1 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_k=10$ 일 때, $|a_1|$ 의 값을 구하시오.

63

4점 중반

해설 p.72

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & (a_n\text{이 } n\text{의 배수인 경우}) \\ a_n+n & (a_n\text{이 } n\text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_1+6 은 12 의 배수이고 $a_5=7$ 일 때, a_1 의 값을 구하시오.

해설 p.73

64 첫째항이 a 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \times 2 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 43$ 일 때, a 의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

〈출처〉 2016년 6월 나형 20번

N제 정복하기

해설 p.74

65 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_{n+1} \times a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5 = 21$일 때, a_1의 값을 구하시오.

점화식의 구조를 파악하라

지금까지는 점화식을 **편하게 나열하는 방법**만을 배웠지만, 이제부터는 점화식의 **구조 자체를 파악**하며 문제를 풀어볼 것이다.

1. 주기 파악

아래 문제를 풀어보자.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12} = \dfrac{1}{2}$일 때, $a_1 + a_4$의 값은? [4점] 〈출처〉 2022학년도 6월 9번

풀이 $a_{12} = \dfrac{1}{2}$라는 조건이 주어졌기 때문에 a_1을 미지수로 놓고 a_{12}까지 나열해 보면 답이 나올 것이다. $a_1 = a$ (단, $a \neq 0$)로 놓고 한번 나열해 보자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a	$\dfrac{1}{a}$	$\dfrac{8}{a}$	$\dfrac{a}{8}$	a		

a_5에서 다시 a_1과 같은 값인 a가 나왔다. 그렇다면 이후로 나열했을 때는 다시 $a_6 = \dfrac{1}{a}$, $a_7 = \dfrac{8}{a}$, $\cdots$ 로 반복되며 $\{a_n\}$은 주기가 4인 수열이 될 것이다.

즉 $a_{12} = a_8 = a_4$가 되기 때문에

$$a_{12} = \frac{1}{2} \rightarrow a_4 = \frac{1}{2}$$

를 알 수 있고 $a_4 = \dfrac{a}{8} = \dfrac{1}{2}$에서 $a = 4$가 바로 구해진다. 따라서 $a_1 + a_4 = \dfrac{9}{2}$이다. 이렇게 나열해 보다가 **이전 항과 같은 값이 나오는 순간 주기를 가진 수열임을 의심**할 수 있어야 한다.

2. 부호 파악

아래 점화식을 보면 무슨 생각이 드는가?

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

아무 생각도 들지 않았다면 앞으로는 반드시 아래와 같은 생각을 할 수 있도록 특히나 머릿속에 넣어놓자.

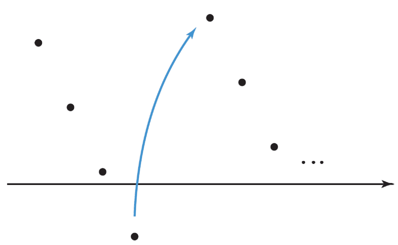
우선 점화식을 한국어로 표현하면

"음수면 -2 곱하고, 0 이상이면 2 빼는구나"

이다. 자, 이제 이런 생각을 할 수 있어야 한다.

"0 이상이면 2를 빼니까 점점 작아질 거고, 언젠간 음수가 되겠구나!"
"그러다 음수가 되면 -2를 곱하잖아? 그럼 다시 양수로 바뀌겠네?"

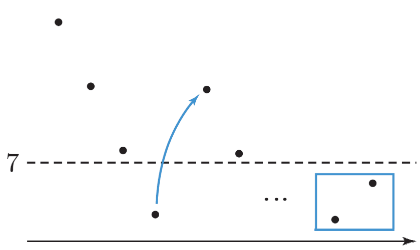
이를 그림으로 생각하면



이런 식으로 생각해 볼 수 있다. 아래 점화식[1] 도 마찬가지이다.

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 7) \\ a_n - 7 & (a_n \geq 7) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



1) 7보다 작아서 2배를 했지만 여전히 7보다 작을 수 있다. 즉, 본문의 그림에서 네모 박스 친 부분이 있을 수 있다.

ex) $a_3 = 10$
$\rightarrow a_4 = 3,\ a_5 = 6$

또한, 어려운 추론이긴 하지만 7 이상인 경우에만 7을 빼서 음수가 될 수 없다. 즉, 이 수열의 첫째항이 양수라면 해당 수열은 평생 음수가 되는 항이 존재하지 않는다.

Ex 1 $a_1 = 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n \leq 3) \\ \dfrac{a_n}{2} + 1 & (a_n > 3) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{10} + a_{20}$ 의 값은?

Ex 2 $a_1 = 28$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 다음 질문에 답하시오.

(1) $a_m a_{m+1} < 0$ 인 자연수 m 의 최솟값은?

(2) $a_k < 0$ 인 100 이하의 모든 자연수 k 의 개수는?

Ex 1 $a_1 = 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n \le 3) \\ \dfrac{a_n}{2} + 1 & (a_n > 3) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{10} + a_{20}$ 의 값은?

풀이 차근차근 나열해 보자.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
4	3	6	4			

a_4 에서 a_1 과 같은 값이 등장했다. 이 수열은

$$a_{n+1} = (a_n \text{에 대한 관계식})$$

꼴이므로 a_n 이 하나로 정해지면 a_{n+1} 의 값도 하나로 정해진다.[1)]
즉 a_4 부터는 다시 $4, 3, 6, 4, 3, 6, \cdots$ 의 꼴로 반복될 것이므로 주기가 3 인 수열임을 알 수 있다.

또한

$$a_{10} = a_{(3\times3)+1} = a_1,\ a_{20} = a_{(3\times6)+2} = a_2$$ [2)]

이므로 $a_{10} + a_{20} = a_1 + a_2 = 7$ 이다.

1) 만약 a_{n+2}이 a_n 과 a_{n+1} 에 대한 관계식으로 표현되어 있다면 값이 같은 두 개의 항이 연속적으로 나와야 주기를 갖는 수열이라 할 수 있다.

ex) $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ 이고

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} \le 2) \\ |a_{n+1} - a_n| & (a_{n+1} > 2) \end{cases}$$

일 때, $\{a_n\}$ 을 나열해 보면

$1, 2, 3, 1, 4, 3, 1, \cdots$

에서 $3,\ 1$ 이 반복돼서 나왔으므로 a_3 이후로 쭉

$3, 1, 4, 3, 1, 4, \cdots$

의 형태로 반복된다는 것을 알 수 있다.

2) 주기가 3 이므로 항 번호에서 3 의 배수에 해당하는 수만큼 빼주면 계속 같은 값을 가지는 항이 나온다. 이를 일반화하면 항 번호를 3 으로 나눈 나머지가 같은 항들은 모두 값이 같다.

Ex 2 $a_1 = 28$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 다음 질문에 답하시오.

(1) $a_m a_{m+1} < 0$ 인 자연수 m 의 최솟값은?

풀이 내 언어로 만들어 보면

0 이상일 때는 -2 씩 감소,

음수일 때는 -2 곱함

이므로 $a_1 = 28$ 에서 $a_{15} = 0$ 까지는 쭉 감소하다가 $a_{16} = -2$, 즉 음수가 될 때 처음으로 -2 를 곱해준다. 이때 $a_{17} = 4$ 가 되어 $a_{16} < 0$, $a_{17} > 0$ 이므로 $a_m a_{m+1} < 0$ 인 자연수 m 의 최솟값은 16 이다.

(2) $a_k < 0$ 인 100 이하의 모든 자연수 k 의 개수는?

풀이 첫 번째로 음수가 되는 항인 a_{16} 부터 나열해 보면

$$-2 \to 4 \to 2 \to 0 \to -2 \to 4 \to 2 \to 0 \to \cdots$$

의 형태로 반복된다. 즉 4 의 주기로 음수인 항이 출현하므로 음수인 항을 모두 나열하면

$$a_{16},\ a_{20},\ \cdots,\ a_{100},\ \cdots$$

이다. 따라서 $a_k < 0$ 인 100 이하의 모든 자연수 k 의 개수는 $k = 4l$ 이라 하면, $4 \le l \le 25$ 인 자연수 l 의 개수와 같다. 따라서[1] 정답은 22 이다.

1)

$16, 20, \cdots, 100$

위 자연수들의 개수를 세면 되므로 4 로 모두 약분하면

$4, 5, \cdots, 25$

가 되어 개수를 세기 편해진다. 또는 공차가 4 인 등차수열이므로 $100 - 16 = 84 = 4 \times 21$ 에서 점프 횟수는 21 이므로 자연수의 개수는 22 개라고 구해도 된다.

66

4점 중반

해설 p.75

$a_1 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n \text{이 } 3\text{의 배수가 아닐 때}) \\ a_n - 1 & (n \text{이 } 3\text{의 배수일 때}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_k = 10$ 이 되도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오.

67

4점 중반

해설 p.76

상수 k 에 대하여 $a_1 = k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{3}{2}k & (a_n < 0) \\ -2a_n & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_6 \times a_7 = -8$ 일 때, $|a_8|$ 의 값을 구하시오.

해설 p.77

68 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$
>
> (나) a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지 $(n \geq 3)$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 166$일 때, m의 값을 구하시오. [4점]

〈출처〉 2015년 4월 교육청 A형 28번

69 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

해설 p.78

(가) $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ -3a_n & (a_n < 0) \end{cases}$

(나) $a_{n+3}=a_n$

$a_8 \times a_{12} > 0$일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.