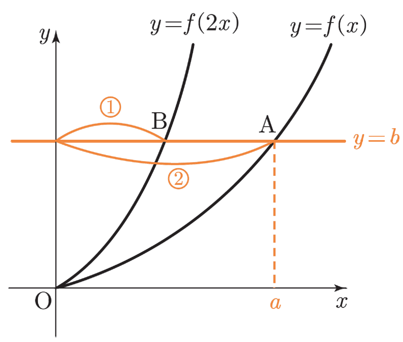
Theme 3

지수로그함수의 확대·축소 (1)

지수로그함수의 확대·축소 (1) ★

최근 특히 많이 언급되는 주제지만, 사실 이 내용은 기출에서도 이미 여러 번 출제된 바 있다. 특히 삼각함수 그래프의 주기를 다룰 때는 확대·축소 개념이 중요해서, 평정 수 I 시즌2에서도 이를 따로 정리해 두었다.

먼저 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축 방향으로 2배 압축[1]한 상황을 생각해 보자. 이때 결론부터 이야기 하면, 함수는 $y=f(2x)$로 바뀌게 되는데 이를 외운다기보다는, 왜 그런지를 직관적으로 이해하는 것이 더 중요하다. 먼저 두 그래프를 그려보자.



이제 위 그림을 보면서 아래 내용을 같이 읽어보자. 목표는 하나다.

"아, 당연히 함수 $y=f(2x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를
x축 방향으로 2배 압축한 것이구나"

라는 감각을 자연스럽게 얻어서, 결국은 **직관적으로 느낄 수 있게 되는 것**이 핵심이다.

직관적으로 느낄 수 있는 게 중요해!

$f(a)=b$라고 해보자. 그러면 $y=f(x)$는 $x=a$일 때 $y=b$가 된다.
그림으로 보면 점 A가 바로 그런 점이다. 그러면 이제 아래 질문을 생각해 보고 다음 장을 보자.

"함수 $y=f(2x)$에서는 $y=b$가 되려면,
즉, $f(2x)=b$를 만족하는 x의 값은 무엇이며, 그 값은
a와 어떤 관계일까?"

1) 확대랑 대응되는 단어는 축소여서 축소를 쓰고 싶지만, 압축이라는 단어가 직관적으로 더 잘 와닿기에, 주다에서는

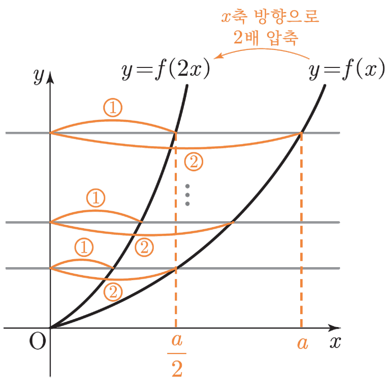
확대 ↔ 압축

이렇게 대응시켜 이야기하도록 하자.

맞다. 함수 $y=f(2x)$에는 $x=\dfrac{a}{2}$만 대입해도 **충분히**

$$f\left(2\times\frac{a}{2}\right)=f(a)=b$$

가 만들어진다. 즉, $y=f(2x)$는 함수 $y=f(x)$에 비해 **x의 값을 절반으로 줄여도 같은 y의 값을 만든다는 것**이다. 이 현상이 x축에 평행한 모든 직선에 대해서 똑같이 일어난다고 생각하면, 두 그래프가 x축의 방향으로 2배 압축된 관계라는 것을 자연스럽게 이해할 수 있을 것이다.



지금 배운 사실을 통해 **2배 확대**되는 상황까지 확장해 보면 아래와 같다.

$$y=f(x)\text{를 } x\text{축 방향으로 2배 압축} \Rightarrow y=f(2x)$$

$$y=f(x)\text{를 } x\text{축 방향으로 2배 확대} \Rightarrow y=f\left(\frac{x}{2}\right)$$

같은 방식으로 y축 방향으로의 확대와 압축도 정리할 수 있다.

$$y=f(x)\text{를 } y\text{축 방향으로 2배 압축} \Rightarrow 2y=f(x) \Rightarrow y=\frac{1}{2}f(x)$$

$$y=f(x)\text{를 } y\text{축 방향으로 2배 확대} \Rightarrow \frac{y}{2}=f(x) \Rightarrow y=2f(x)$$

그런데 이 부분은 색칠된 형태의 식으로 쓰는 게 자연스럽게 더 잘 느껴지기 때문에 해당 식의 형태로 활용하는 것이 좋다.[1] 결국 총정리하면 아래와 같다.

$$y=af\left(\frac{x}{b}\right)\ :\ y=f(x)\text{를 } x\text{축 방향으로 } b\text{배, } y\text{축 방향으로 } a\text{배 확대한 함수}$$

1) 직관적으로도 y축 방향으로 a배 되면, 모든 함숫값들이 다 a배 된다는 것이니까

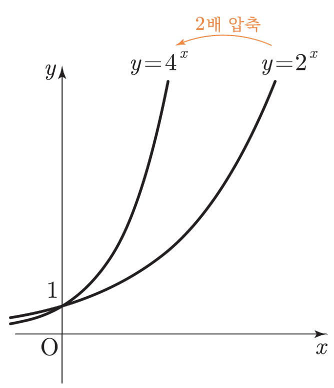
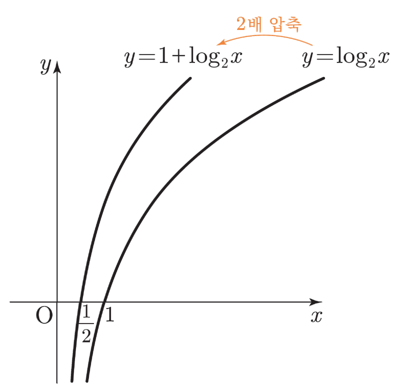
$y=f(x) \Rightarrow y=af(x)$

로 바뀌는 것이 충분히 느껴지지 않는가?

Theme 3

지수로그함수의 확대·축소 (1)

앞 장에서 배운 사실을 지수·로그함수에 적용해 보자. 먼저 x축 방향의 확대·축소부터 보면 아래와 같다.

	지수함수	로그함수
함수	$y=2^x$	$y=\log_2 x$
2배 압축한 함수	$y=2^{2x}$ ⇨ $y=4^x$	$y=\log_2 2x$ ⇨ $y=1+\log_2 x$
그래프		
결론	지수함수는 x축 방향으로 2배 압축하면, **밑이 2배가 된다.**[1]	로그함수의 그래프는 x축 방향으로 2배 압축하면, **y축 방향으로 1만큼 평행이동** 된다.[2]

반면, y축 방향으로 2배 확대·축소하게 되면

$$y=2^x \Rightarrow y=2\times 2^x \Leftrightarrow y=2^{x+1}: x\text{축 방향으로 } -1\text{만큼 평행이동}$$

$$y=\log_2 x \Rightarrow y=2\log_2 x \Leftrightarrow y=\log_{\sqrt{2}} x: \text{밑이 } \frac{1}{\sqrt{2}}\text{배가 됨}$$

으로 반대의 현상이 일어난다.[3] 따라서 정리하면 아래와 같다.

x축 방향 확대·축소: 지수함수는 **밑의 변화**, 로그함수는 **평행이동**,
y축 방향 확대·축소: 지수함수는 **평행이동**, 로그함수는 **밑의 변화**로 정리하면 된다.

이제 이 사실이 문제에서 어떻게 활용되는지는 다음 장의 체화하기에서 연습해 보자.

1) 참고로 3배가 되면

$y=2^x$ ⇨ $y=2^{3x}=8^x$

이 되기 때문에 밑이 2^2배 된다.

일반화해보면 $y=a^x$에 대하여 x축 방향으로 n배 압축하면

$y=a^x$ ⇨ $y=a^{nx}=(a^n)^x$

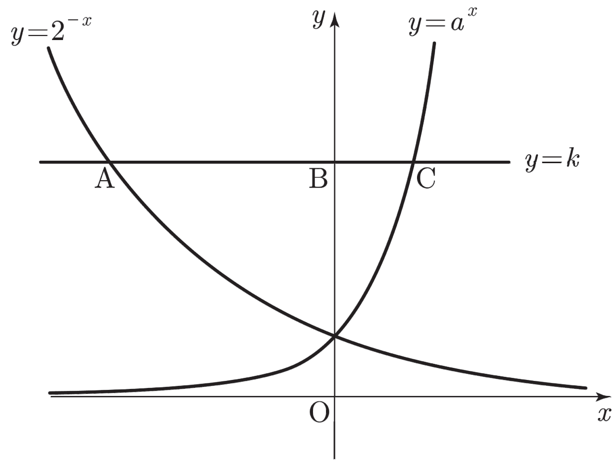
이 되어 밑이 a^{n-1}배 된다.

2) 따라서 로그함수의 그래프를 x축 방향으로 확대·축소 하게 되면 “좌우로 늘렸다, 줄였다”라고 생각하기보다는 위아래로 평행이동 되었다고 생각하는 것이 훨씬 경제적이다.

3) 사실 밑이 같은 지수·로그함수는 서로 역함수 관계이기에, $y=x$ 대칭임을 생각하면 당연하다.

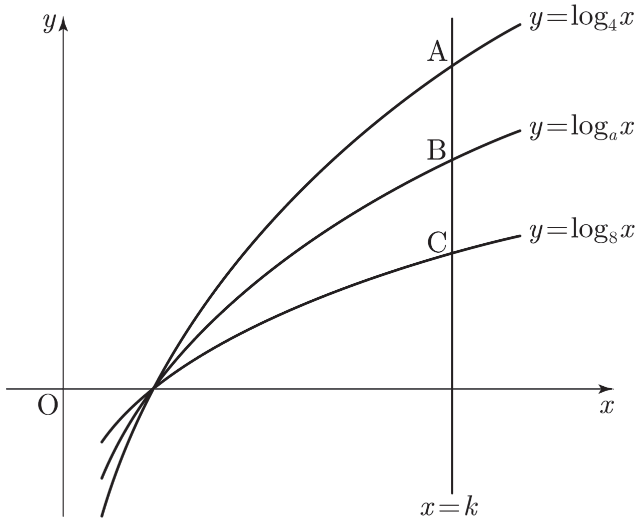
Ex 1

아래 그림에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$ 일 때, a 의 값은?



Ex 2

상수 $a\,(4 < a < 8)$ 에 대하여 세 곡선 $y = \log_4 x$, $y = \log_a x$, $y = \log_8 x$ 와 직선 $x = k$ $(k > 1)$이 만나는 점을 각각 A, B, C 라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\log_2 a = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



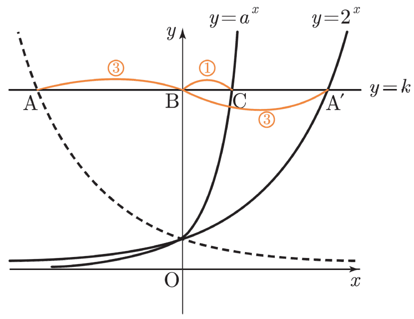
지수로그함수의 확대·축소 (1)

Ex 1

아래 그림에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3:1$ 일 때, a 의 값은?

★풀이

먼저 곡선 $y=2^{-x}$ 를 y 축에 대하여 대칭하면 곡선 $y=2^x$ 이 된다.



이를 통해 함수 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3배 확대하면 함수 $y=2^x$ 이 되는 것을 발견할 수 있고 이를 통해

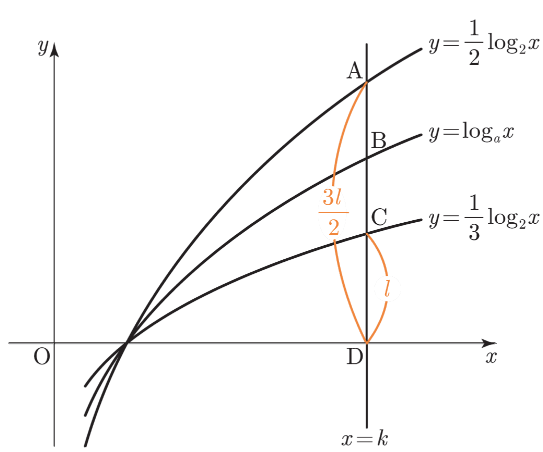
$$y=a^{\frac{x}{3}} \Leftrightarrow y=2^x$$

임을 알 수 있다. 따라서 $a^{\frac{1}{3}}=2$ 에서 $a=8$ 임을 알 수 있다.

Ex 2

상수 $a\,(4<a<8)$ 에 대하여 세 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_a x$, $y=\log_8 x$ 와 직선 $x=k$ $(k>1)$ 이 만나는 점을 각각 A, B, C 라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}$ 일 때, $\log_2 a=\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

★풀이 먼저 두 함수 $y=\log_4 x$ 와 $y=\log_8 x$ 의 밑을 2로 통일해서 주어진 함수들의 그림을 다시 그려보면 아래와 같다.



이때 $y=\frac{1}{3}\log_2 x$를 y축 방향으로 $\frac{3}{2}$배 확대하면 $\frac{1}{2}\log_2 x$이 되므로 $\overline{\mathrm{CD}}=l$이라 두면, $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{3l}{2}$이다. 이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{l}{4}$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{5l}{4}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{BD}}=l:\frac{5l}{4}$이므로 함수 $y=\frac{1}{3}\log_2 x$의 그래프를 y축 방향으로 $\frac{5}{4}$배 확대하면 $y=\log_a x$가 된다. 즉

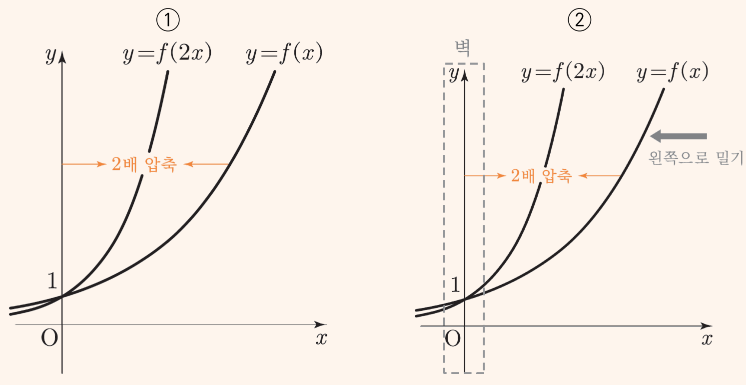
$$\log_a x=\frac{5}{12}\log_2 x \Rightarrow \frac{\log x}{\log a}=\frac{5}{12}\times\frac{\log x}{\log 2}$$
$$\Rightarrow \frac{12}{5}=\frac{\log a}{\log 2}$$

이므로 $\log_2 a=\frac{12}{5}$이다. 따라서 $p=5$이고 $q=12$이므로 $p+q=17$이다.

★답 17

x축 방향으로 압축한다는 것에 대한 직관적 이해

x축 방향으로 2배 압축한다는 것은



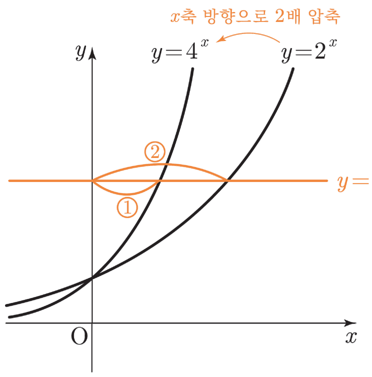
①과 같이 압축한다는 것이기에, ②와 같이 마치 y축이 벽이라고 생각하고 곡선 $y=f(x)$를 오른쪽에서 왼쪽으로 누르는 느낌으로 생각하면 좋다.

지수로그함수와 확대·축소 (2)

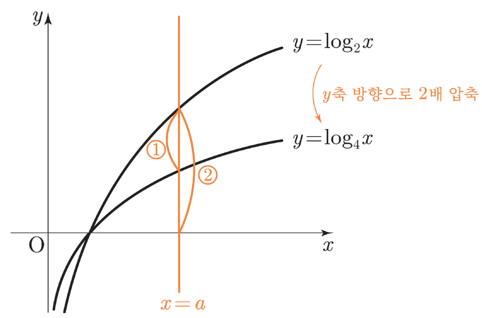
지수로그함수와 확대·축소 (2)

이번에 x축과 y축 방향으로 동시에 확대되거나 축소되는 상황을 배워보자. 앞에서는 x축 방향으로만, 또는 y축 방향으로만 확대·축소될 때 **그 방향과 평행한 직선**이 함께 등장하는 경우가 많다는 것을 보았다.

① x축이랑 평행한 직선 출제



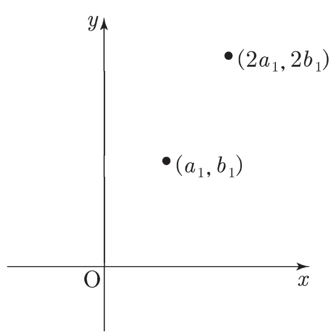
② y축이랑 평행한 직선 출제

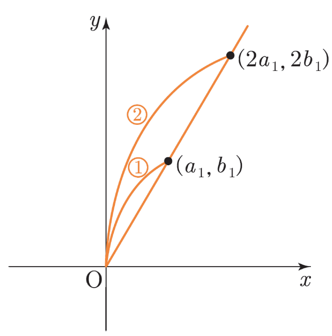


그렇다면, x축 방향과 y축 방향으로 **동시에 확대 또는 축소**되는 경우에는 어떤 상황이 함께 출제될까?

앞에서도 함수의 그래프 움직임을 **점의 움직임**으로 먼저 파악했듯, 이번에도 같은 방식으로 보자. 먼저 x축과 y축 방향으로 **같은 비율만큼 확대되는 경우**를 생각해 보도록 하자.

예를 들어 점 (a_1, b_1)를 x축으로 2배 y축으로 2배 확대하면, 그 점은 $(2a_1, 2b_1)$이 된다. 이 두 점을 좌표평면 위에 표시해 보면 왼쪽 아래 그림과 같이 될 것이다.



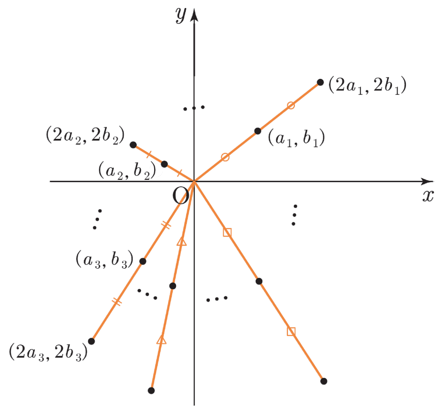


이때 오른쪽 그림과 같이 두 점을 연결해 보면, 해당 직선은 **원점을 지날 수밖에 없으며**, 표시된 것처럼 **두 선분의 길이의 비는** $1:2$가 된다는 것까지 이해할 수 있을 것이다.

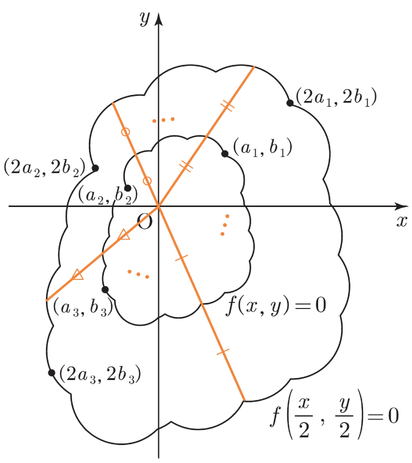
이제 앞 장에서 생각해 본 두 점을 무수히 많은 점들

$$(a_2,\ b_2),\ (2a_2,\ 2b_2)\ /\ (a_3,\ b_3),\ (2a_3,\ 2b_3),\ \cdots$$

까지로 확장해 보고, 대응되는 두 점들을 연결하면 만들어진 직선들은 **모두 원점에서 교점을 가질 수밖에 없다.** 즉, 같은 비율로 확대된 두 점은 언제나 원점과 한 직선 위에 놓인다. 아래 그림은 그 사실을 한눈에 보여 준다.



이제 점 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, $\cdots$ 을 지나는 곡선 $f(x,\ y)=0$이라 하자. 그러면 각 점을 x축 방향으로 2배, y축 방향으로 2배 확대해 얻은 점 $(2a_2,\ 2b_2)$, $(2a_3,\ 2b_3)$, $\cdots$ 을 지나는 곡선 $f\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}\right)=0$ [1] 으로 나타낼 수 있다. 이때 원래 곡선 위의 점과 확대된 곡선 위의 대응점을 각각 연결해 보면, 아래 그림처럼 그 직선들은 예외 없이 모두 원점을 지난다.



결국 같은 비율로 확대·축소된 두 곡선에서는, 대응되는 두 점을 이은 직선이 모두 원점을 지난다. 따라서 다음 장의 그림처럼 **원점을 지나는 직선**을 하나 그어 보면, 그 직선이 두 곡선과 만나는 두 점은 서로 대응되는 점, 즉 **확대·축소된 관계에 있는 점**들이다.

1) 앞에서

x축 방향으로 2배 확대

⇨ x 대신 $\frac{x}{2}$

y축 방향으로 2배 확대

⇨ y 대신 $\frac{y}{2}$

임을 배웠었다. 따라서 두 축의 방향으로 동시에 2배 확대되면

$$f(x,\ y)=0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}\right)=0$$

으로 바뀐다고 생각해 주면 된다.

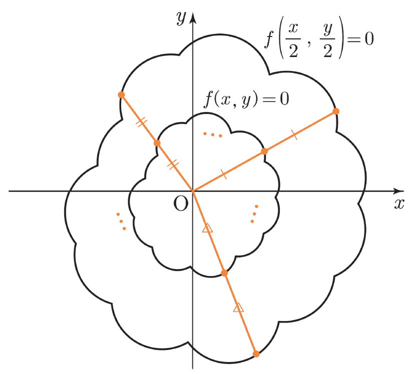
당연하게도 반대로 x축 방향으로 $\frac{1}{2}$배 확대(2배 축소), y축 방향으로 $\frac{1}{2}$배 확대(2배 축소) 된다면,

$$f(x,\ y)=0 \Rightarrow f(2x,\ 2y)=0$$

이 되는 것이다.

Theme 4

지수로그함수와 확대·축소 (2)



따라서 x축과 y축 방향으로 **같은 비율**로 확대·축소되는 경우에는 원점을 지나는 직선이 함께 등장할 가능성이 높으며, 이때 그 직선 위의 대응점들이 각각 **곡선이 확대·축소된 비율만큼과 동일한 관계**에 있다는 것을 파악하는 것이 핵심이다.

반대로 **x축과 y축 방향으로 서로 다른 비율로** 확대·축소되는 경우에는 어떤 일이 생기는지는 각주[1]를 읽어보도록 하자.

이제 확대·축소된 상황이 문제에서 어떻게 활용되는지는 어느 정도 감이 왔을 것이다. 여기서 한 가지 더 중요한 것은, 문제에 주어진 두 함수가 실제로 **확대·축소 관계인지 아닌지**를 파악할 수도 있어야 한다는 점이다.

예를 들어 함수 $y=2^x$를 x축과 y축 방향으로 각각 2배 확대했다고 하자. 그러면 함수식이 x 대신 $\frac{x}{2}$, y 대신 $\frac{y}{2}$로 바뀔 것이므로 $\frac{y}{2}=2^{\frac{x}{2}}$가 되는데, 이를 예쁘게 정리하면

$$\frac{y}{2}=2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow y=2\times 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow y=2^{\frac{x}{2}+1}$$

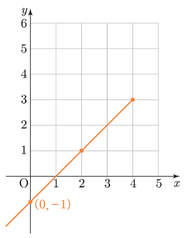
와 같이 변형된다. 따라서 두 함수 $y=2^x$, $y=2^{\frac{x}{2}+1}$와 같이 지수함수가 문제에 나와도

"아, x축 방향과 y축 방향으로 각각 2배가 된 관계이구나!"

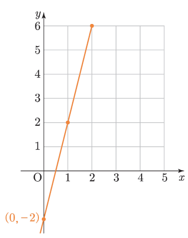
라고 알아볼 수 있어야 한다. 특히 대부분의 문제는 $\frac{y}{2}=2^{\frac{x}{2}}$처럼 직접적인 형태로 주어지기보다는, $y=2^{\frac{x}{2}+1}$와 같이 조금 더 정리된 형태로 출제된다. 결국 필요한 것은, 이런 식을 다시 확대·축소의 관점에서 읽어낼 수 있어야 한다는 것이며, 이를 위해서는 지금까지 배운 형태로 한 번 되돌려 보는 습관을 꼭 들여야 한다.

1) 예를 들어 x축 방향으로 2배 y축 방향으로 3배된 상황을 생각해 보자.

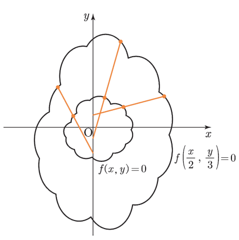
먼저 두 점 $(2, 1)$과 $(4, 3)$을 지나는 직선을 생각해 보면



이 직선의 y절편은 -1이다. 반면 두 점 $(1, 2)$, $(2, 6)$을 지나는 직선을 생각해 보면,



y절편이 -2가 되어, 두 직선만 보아도 y절편이 다르다.



따라서 위 그림처럼 두 곡선 $f(x, y)=0$과 $f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}\right)=0$에 대하여 대응되는 두 점들을 연결해 보면, 직선들이 **공통으로 지나는 한 점**이 일반적으로 생기지 않는다. 따라서 이런 상황은 출제하기에 매력적인 요소가 많지 않다.

Ex 1

상수 k와 곡선 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$ 위의 임의의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 점 $\mathrm{B}(ka,\ kb)$가 항상 곡선 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 위에 있을 때, k의 값은?

Ex 2

양수 m에 대하여 직선 $y=mx$가 곡선 $y=4^{x}-3$과 만나는 두 점을 x좌표가 작은 것부터 차례대로 A, B라 하고, 직선 $y=mx$가 곡선 $y=2^{x+1}-6$과 만나는 두 점을 x좌표가 작은 것부터 차례대로 C, D라 할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은?

지수로그함수와 확대·축소 (2)

Ex 1

상수 k와 곡선 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$ 위의 임의의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에 대하여 점 $\mathrm{B}(ka,\ kb)$가 항상 곡선 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 위에 있을 때, k의 값은?

★풀이

두 가지 풀이로 가보자.

① 수식을 이용한 풀이

두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(ka,\ kb)$가 각각 곡선 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$와 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 위의 점이므로 함수식에 대입해 주면 성립한다.

$$㉠\ b=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3a+1},\quad ㉡\ kb=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{ka}$$

이때 ㉠을 ㉡과 비슷한 식의 형태로 변형해 주면

$$b=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3a+1}\ \Rightarrow\ b=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3a}\ \Rightarrow\ 3b=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3a}$$

이 되는데, 이를 ㉡의 식 $kb=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{ka}$과 비교해 보면 감각적인 직관으로 $k=3$이 됨을 예측해 볼 수 있다.

물론 근거없는 추론이었긴 하지만, 수학에서 이런 감각적인 직관도 중요하다. 수학 문제를 풀 때는 종종 "이럴 것 같은데?"를 먼저 생각해 놓고 이후에 검증의 과정을 거치면서 풀 때도 꽤나 있다. 그럼 검증을 해보자.

방법은 간단하다. 함수 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 떠올려 보면 두 등식

$$3b=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3a}\ \text{와}\ kb=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{ka}$$

이 성립하므로 두 등식을 연립하면

$$b=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3a}=\frac{2}{k}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{ka} \Rightarrow \frac{k}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{(k-3)a}$$

을 얻을 수 있다. 이때 문제에서 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$는 곡선 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$ 위의 임의의 점이라고 했으므로 모든 실수 a에 대하여

$$\frac{k}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{(k-3)a}$$

이 성립해야 한다. 따라서 a의 계수인 $(k-3)$이 0이 되어 주어야만 하므로 $k=3$임을 알 수 있다. 추가로 $k=3$이면, 좌변과 우변이 모두 1로 성립한다는 것도 확인할 수 있다.

② 확대·축소를 이용한 그래프적 풀이

주어진 함수 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$를 적당히 변형해 보면

$$y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1} \Rightarrow y=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \Rightarrow 3y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$$

이다. 따라서 함수 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$에서 x 대신 $3x$, y 대신 $3y$가 대입된 상황이므로

$y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 x축 방향으로 $\frac{1}{3}$배 확대(3배 압축),

y축 방향으로 $\frac{1}{3}$배 확대(3배 압축) $\Rightarrow y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$

인 상황이다. 따라서 함수 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(ka,\ kb)$를 지난다면, 함수 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$는 점 $\left(\frac{ka}{3},\ \frac{kb}{3}\right)$를 지날 수밖에 없다. 따라서 $k=3$이 되어야 문제에서 주어진 조건대로 함수 $y=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1}$가 $(a,\ b)$를 지나도록 만들 수 있다.

★답 3

지수로그함수와 확대·축소 (2)

Ex 2

양수 m에 대하여 직선 $y=mx$가 곡선 $y=4^x-3$과 만나는 두 점을 x좌표가 작은 것부터 차례대로 A, B라 하고, 직선 $y=mx$가 곡선 $y=2^{x+1}-6$과 만나는 두 점을 x좌표가 작은 것부터 차례대로 C, D라 할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은?

★풀이

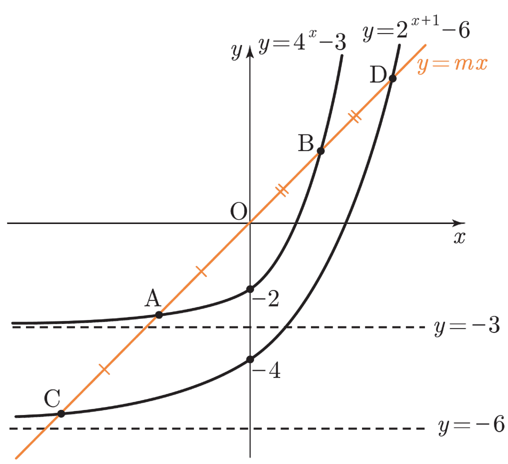
먼저 함수 $y=2^{x+1}-6$을 변형해 보면

$$y=2^{x+1}-6 \quad ⇨ \quad y=2\times2^x-6 \quad ⇨ \quad \frac{y}{2}=2^x-3$$

이다. 따라서 함수 $y=4^x-3$에서 x 대신 $\dfrac{x}{2}$, y 대신 $\dfrac{y}{2}$를 대입하면 만들어지므로

함수 $y=4^x-3$의 그래프를 **x축 방향으로 2배, y축 방향으로 2배 확대**
⇨ 함수 $y=2^{x+1}-6$의 그래프

가 된다. 따라서 문제 상황을 그림으로 그려보면 아래와 같고,



표시된 것처럼 $2\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}$, $2\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$임을 알 수 있다. 이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}$이고 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{OD}}$인데, $2(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}})=\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{OD}}$이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=2$이다.

★답 2

01

$a>1$ 인 상수 a 에 대하여 직선 $y=4$ 가 두 곡선 $y=a^{x}$, $y=a^{-4x}$ 과 만나는 점을 각각 A , B 라 하자.

$$\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$$

일 때, a 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① $2^{\frac{1}{4}}$ ② $2^{\frac{1}{2}}$ ③ $2^{\frac{3}{4}}$ ④ 2 ⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

Day2 입문 N제

02

두 상수 a, $b\,(1<a<b)$와 $k>1$인 실수 k에 대하여 곡선 $y=a^x$가 직선 $y=k$와 만나는 점을 P, 곡선 $y=\log_b x$가 직선 $x=k$와 만나는 점을 Q라 하자. 두 직선 OP, OQ의 기울기의 곱이 $\frac{1}{2}$이고 $a\times b=216$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

03

곡선 $y=\left(\frac{1}{16}\right)^{x}$ 위의 제 1 사분면에 있는 점 A 와 곡선 $y=-\frac{1}{2}\log_{16}(2x)$ 위의 제 1 사분면에 있는 점 B(a, b)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 OA , OB 의 기울기의 곱은 1 이다.

(나) 점 A 에서 x축까지의 거리와 점 B 에서 y축까지의 거리의 합은 $\frac{3}{4}$ 이다.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 의 값을 구하시오.

Day2 입문 N제

04

좌표평면에서 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 중 x좌표가 작은 점을 A, x좌표가 큰 점을 B라 하고, 곡선 $y=2^{\frac{1}{2}x+1}$ 위의 두 점 중 x좌표가 작은 점을 C, x좌표가 큰 점을 D라 하자. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 AD의 길이는?
(단, O는 원점이다.)

(가) 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있고, 세 점 O, C, D는 한 직선 위에 있다.
(나) 점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

① $\sqrt{51}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{53}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{55}$

05

내 손으로 풀어보기 해설

두 상수 a, b $(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의
두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과
두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다.
함수 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$에 대하여 $f(1) = 40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

〈출처〉2022학년도 수능 13번

Day2 기출

06

내 손으로 풀어보기 해설

곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\dfrac{77}{8},\ \dfrac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

〈출처〉 2026학년도 수능 22번