

<10> 빈출 함수 2 – 구간 내 최대, 최소 함수

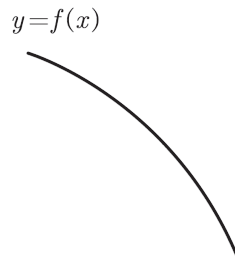
개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

빈출 함수 2 – 구간 내 최대, 최소 함수

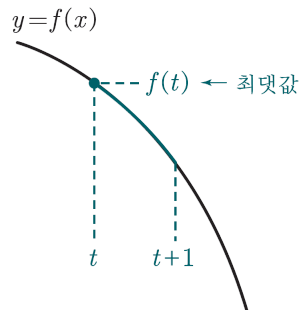
변수에 따라 변하는 구간 내에서 최댓값이나 최솟값을 함숫값으로 가져가는 함수를 말한다. 예를 들면

“실수 t 에 대하여 닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자.”

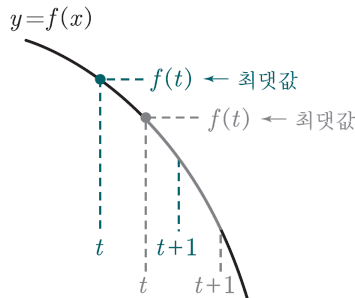
와 같은 함수를 말한다.¹⁾ 문자가 많아서 복잡해 보일 수 있는데, 대부분은 $g(t)$ 의 그래프만 그릴 수 있다면 쉽게 풀 수 있으니 걱정하지 말자. 우선, 아래와 같이 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $g(t)$ 의 그래프를 그려보자.



이제 위 그림 위에 임의로 구간 $[t, t+1]$ 을 잡아보면



위 그림과 같고, 구간 $[t, t+1]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(t)$ 라 할 수 있다. 이때 이 최댓값을 $g(t)$ 라 정의했으니 위 그림에선 $g(t) = f(t)$ 가 되는 것이다. 이 상황은 t 를 다른 곳에 잡아보아도 마찬가지이다.



계속 구간 $[t, t+1]$ 에서 가장 왼쪽의 함숫값인 $f(t)$ 가 최댓값이 된다.²⁾

1) 아주 예전부터 단골처럼 출제된 함수인데, 최근 다시 눈에 많이 보이기 시작했다.

2024학년도 수능 21번
2024년 3월 22번
2022년 10월 22번
⋮

주로 변별력을 가진 4점 문항으로 출제되었기에 본 파트도 난이도가 높다는 점은 감안하고 공부하도록 하자.

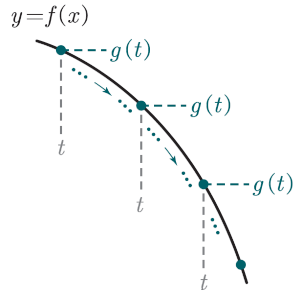
2) 사실 조금만 생각해 봐도 당연하다. 감소하는 함수는 그래프만 봐도 구간의 왼쪽 끝이 항상 계속 크다는 것을 알 수 있고, 감소의 정의를 떠올려봐도 당연하다.

<감소의 정의>

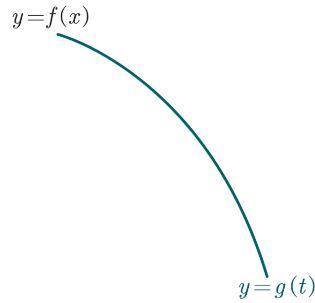
$$x_1 < x_2 \text{ 일 때, } f(x_1) > f(x_2)$$

이므로 x 값이 커질 때 함숫값이 계속 작아지므로 구간의 왼쪽 끝이 항상 최댓값이 된다.

즉, t 를 어디에 잡아봐도

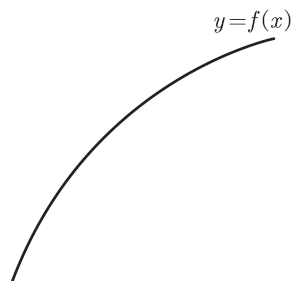


$g(t)$ 의 그래프는 곡선 $y=f(x)$ 의 그래프를 따라가게 되므로



$g(t)$ 의 그래프는 위와 같이 $f(x)$ 의 그래프와 동일하게 그려질 수밖에 없다.

자. 이제 한 번은 같이 연습해 봤으니 이제 아래와 같이 $f(x)$ 가 **증가하는 경우**에 대해서도 닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값 $g(t)$ 의 그래프를 **직접 그려본 후**, 다음 장과 비교해 보도록 하자. ¹⁾

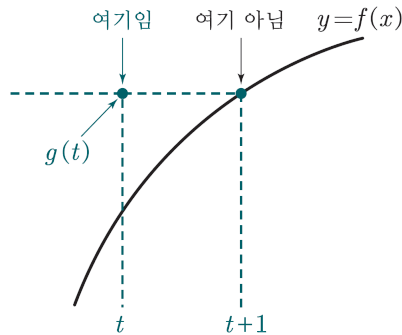


1) 아래 여백도 많이 두었으니 제발 그려본 다음에 다음 장으로 넘어가 보자. 틀려도 좋다. 부탁이다.

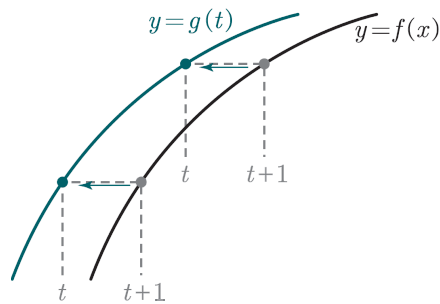
<10> 빈출 함수 2 – 구간 내 최대, 최소 함수

개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

아마 이번엔 구간의 오른쪽 끝이 $g(t)$ 가 된다는 것은 찾았을 텐데, 한 가지 조심할 점은 함수 $g(t)$ 는 t 의 값에 따라 달라지는 함수이기 때문에



최댓값이 $f(t+1)$ 이면 그 값을 $x = t$ 일 때로 가져와서 $g(t)$ 의 함수값을 찍어야 한다. 이 과정을 t 를 움직여 보면서 반복한다고 생각하면,



$g(t)$ 의 그래프는 위와 같이 그려진다고 생각할 수 있다.

여기까지 이해했다면 우리는 이런 생각을 해볼 수 있다. 만약 $f(x)$ 의 그래프가 항상 감소하거나, 항상 증가한다면

무조건 구간의 왼쪽 끝이나 오른쪽 끝이 $g(t)$ 의 함수값이 되겠네!

라는 생각 말이다. 맞다. 다시 말해 $g(t)$ 가 될 수 있는 후보는 $f(t)$ 이거나 $f(t+1)$ 이 된다는 것이고, 우리는 그 중에서 더 큰 값을 $g(t)$ 로 가져가면 된다는 것이다.

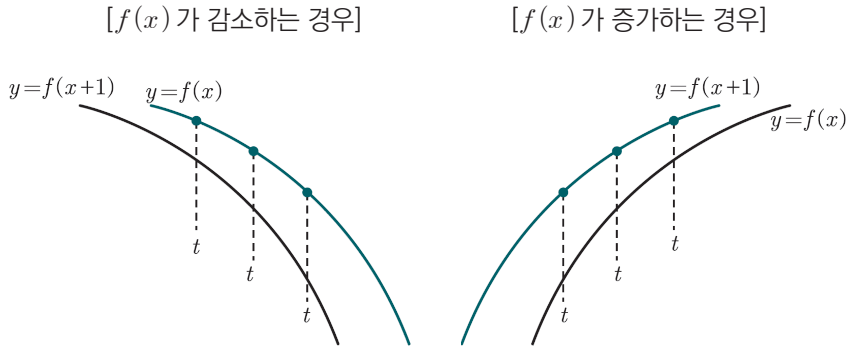
이때, 만약 여기서 앞에서 배웠던 것이 기억나서

$$g(t) = \max\{f(t), f(t+1)\}$$

라고 간단하게 표현할 수 있다는 생각이 들었다면 아주 훌륭한 학생이다.

여기까지 이해했다면 $g(t)$ 의 그래프를 훨씬 빠르고 효율적으로 그려볼 수 있다. 그냥 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f(x+1)$ 을 그린 후 더 큰 값을¹⁾ 따라가면 된다는 것이다.

1) 그래프의 관점에서는 “더 위에 있는 그래프를” 이라고 생각하면 된다.



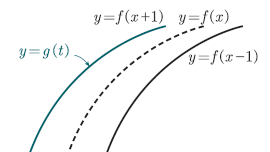
위 두 경우와 같이 말이다. 이 방법대로 하면 앞에서 했던 복잡한 사고 과정 없이

- $f(x)$ 가 감소 : $g(t)$ 의 그래프는 $f(x)$ 의 그래프를 따라 그리면 됨
- $f(x)$ 가 증가 : $g(t)$ 의 그래프는 $f(x+1)$ 의 그래프를 따라 그리면 됨

을 쉽게 알 수 있다. 지금 배운 방법을 아래와 같이 구간이 달라졌을 때도 적용해 보자.

Q 함수 $f(x)$ 의 그래프가 아래와 같다. 닫힌구간 $[t-1, t+1]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 할 때, 곡선 $y = g(t)$ 의 그래프를 그리시오.

2) 아래와 같이 두 곡선 $y = f(x-1)$, $y = f(x+1)$ 을 모두 그린 후



더 위에 있는 곡선 $y = f(x+1)$ 의 그래프를 따라가도록 그려주면 된다.

구간이 달라졌어도 어려울 것이 전혀 없다. 어차피

$$g(t) = \max\{f(t-1), f(t+1)\}$$

라는 사실은 변하지 않는다. 두 곡선 $y = f(x-1)$, $y = f(x+1)$ 을 각각 그린 후 더 큰 것을 따라가면 된다. 정답은 각주²⁾에 있다.

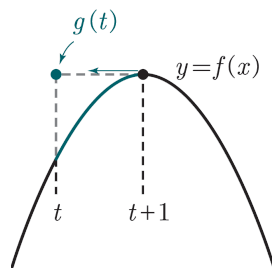
〈10〉 빈출 함수 2 – 구간 내 최대, 최소 함수

개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

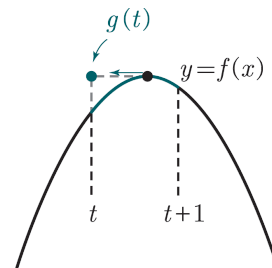
이제 이 정도 했으면 함수 $f(x)$ 가 증가하거나 감소만 하는 경우엔 구간이 어떻게 나오든 모두 그럴 수 있으리라는 생각이 든다. 이제부터는 증가나 감소만 하는 것이 아닌, 구간 내에 극대나 극소가 존재하는 경우에 대해서도 공부해 보자.

구간 $[t, t+1]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 로 정의하고, 극댓값을 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $g(t)$ 의 그래프를 생각해 보자.

(1) 구간의 오른쪽 끝이
극대점의 x 좌표와 만날 때



(2) 구간 내에
극대점의 x 좌표가 포함될 때



위와 같이 구간 내에 극대가 존재하는 경우엔 t 가 아무리 움직여도 계속 최댓값이 극댓값이 될 수밖에 없다. 그리고 이 과정은

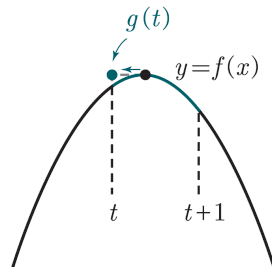
$$(\text{구간의 오른쪽 끝의 } x \text{ 값}) = (\text{극대의 } x \text{ 값})$$

일 때 시작해서

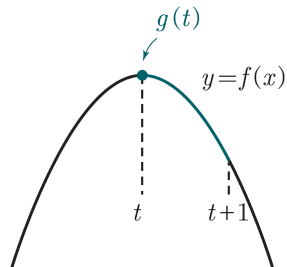
$$(\text{구간의 왼쪽 끝의 } x \text{ 값}) = (\text{극대의 } x \text{ 값})$$

일 때 끝나게 된다. 아래 상황까지 그림으로 보면 더 이해가 갈 것이다.

(3) 구간 내에
극대점의 x 좌표가 포함될 때

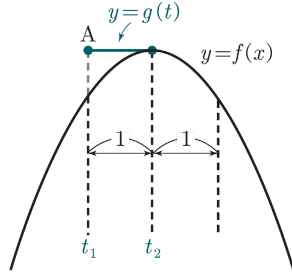


(4) 구간의 왼쪽 끝이
극대점의 x 좌표와 만날 때



즉, (1) ~ (4)의 과정 동안에는 $g(t)$ 가 계속 $f(x)$ 의 극댓값을 함숫값으로 가져가서 $g(t)$ 가 상수인 구간이 생기게 된다.

다시 말해,



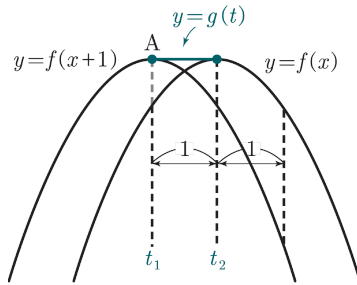
위와 같이 $t=t_1$ 일 때부터, $t=t_2$ 일 때까지 $g(t)$ 가 상수인 구간이 생기게 된다. 이때 점 A 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 극대점을 x 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=f(x+1)$ 의 극대점이기도 하다. 즉, 상수 구간은

(곡선 $y=f(x+1)$ 의 극대)

에서 시작해서

(곡선 $y=f(x)$ 의 극대)

일 때 끝나게 된다. 따라서



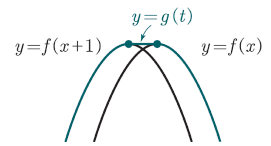
위와 같이 두 곡선 $y=f(x+1)$ 과 $y=f(x)$ 의 두 극대점을 직선으로 이어주면 된다.¹⁾ 이제 지금까지 배운 것을 바탕으로 아래 박스에 정리해 보자.

구간 $[t-a, t+b]$ 에서의 최댓값 함수의 그래프

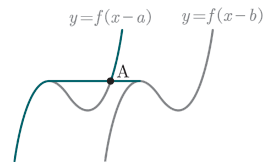
1. 두 곡선 $y=f(x-a)$ 와 $y=f(x+b)$ 의 그래프를 그린다.
2. 두 곡선의 극대점을 직선으로 연결한다.
3. 두 곡선 $y=f(x-a)$ 와 $f(x+b)$ 그래프 중 더 위에 있는 것을 따라 그린다.²⁾

완성!

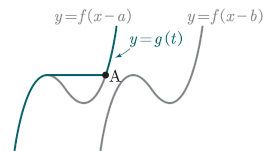
1) 극대를 포함하지 않는 구간에서는 앞서 배웠던 것처럼 두 곡선 $y=f(x+1)$ 과 $y=f(x)$ 중 더 위에 있는 그래프를 따라가면 된다. 이를 통해 $g(t)$ 의 그래프를 그려주면 아래와 같다.



2) 거의 출제된 적은 없지만 만약 약 박스의 방법으로 그렸는데



위와 같이 2번과 3번 단계의 교점이 존재한다면 그냥 아래와 같이 더 큰 곡선을 따라가면 된다.



따라서 더 엄밀히 말하면 두 곡선 $y=f(x-a)$, $y=f(x+b)$ 와 두 극대점을 연결한 선분 중 제일 위에 있는 그래프를 따라가도록 그려주면 된다.

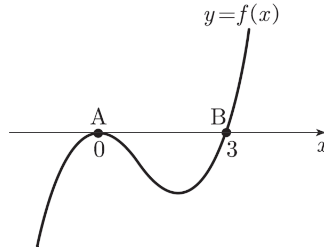
<10> 빈출 함수 2 - 구간 내 최대, 최소 함수

개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

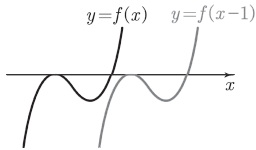
방금 배운 것을 이용하여 아래 그래프를 같이 그려본 후 체화하기로 넘어가자.

Ex 함수 $f(x) = x^2(x-3)$ 과 실수 t 에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, $g(t)$ 의 그래프를 그리시오.

먼저 $f(x)$ 의 그래프를 그려보자.



1) 이때 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 A, B 사이의 거리가 1보다 크기 때문에 본문과 같이 그려진 것이다. 만약 거리가 1보다 작다면,

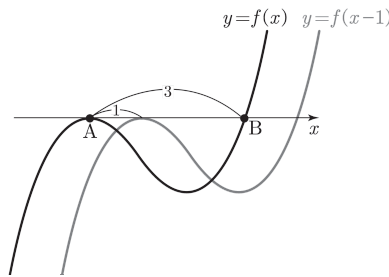


위와 같이 그려지는 경우가 생기게 된다. 경우에 따라 $g(t)$ 의 그래프는 전혀 다르니 주의하도록 하자.

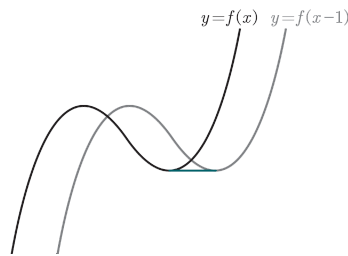
2) $g(t)$ 를 구간 내의 최솟값으로 정의하는 문제가 나오면 앞에서 극대점을 연결했던 것과는 다르게 두 극소점을 연결해주면 된다.

이제 앞서 배웠던 단계를 차례대로 적용해 보자.

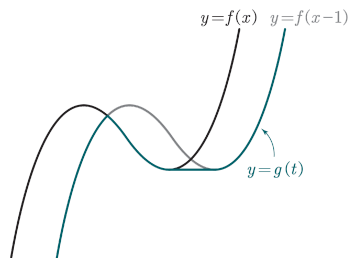
1. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f(x-1)$ 의 그래프 그리기¹⁾



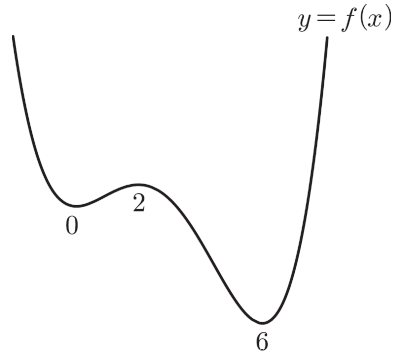
2. 두 극소점을 직선으로 연결하기²⁾



3. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f(x-1)$ 중 더 아래에 있는 그래프 따라가기



Ex 1 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다.
 (단, $f'(0) = f'(2) = f'(6) = 0$)



다음 조건을 만족시키는 함수 $g(t)$ 의 그래프를 각각 그리시오.

(1) 실수 t 에 대하여 구간 $[t, t+2]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값 $g(t)$

(2) 실수 t 에 대하여 구간 $(-\infty, t]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값 $g(t)$

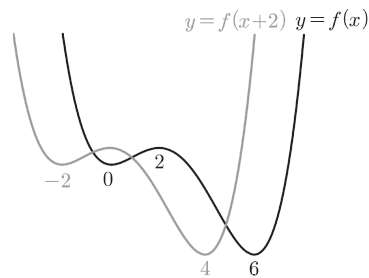
Ex 2 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 구간 $[t, t+1]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, $g(0) = g(3) = 0$ 이다. $f(5)$ 의 값은?

Ex 1

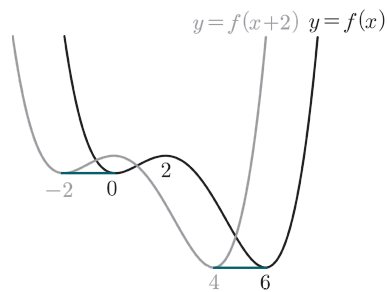
(1) 실수 t 에 대하여 구간 $[t, t+2]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값 $g(t)$

💡 풀이 똑같이 단계별로 그려보자.

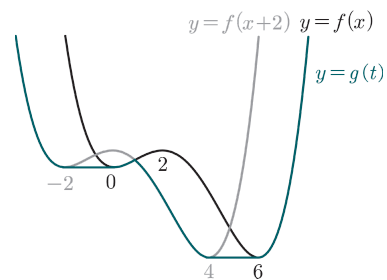
1. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f(x+2)$ 의 그래프 그리기



2. 두 극소점을 직선으로 연결하기



3. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f(x+2)$ 중 더 아래에 있는 그래프 따라가기

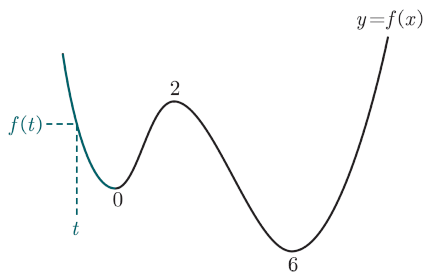


완성!

(2) 실수 t 에 대하여 구간 $(-\infty, t]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값 $g(t)$

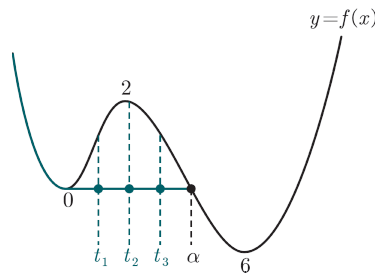
💡 풀이 구간이 $[t-a, t+b]$ 와 같은 형태가 아니라 $(-\infty, t]$ 와 같이 나와서 당황할 수 있을 텐데 실제로는 훨씬 더 쉽다.

(1) $t < 0$ 일 때



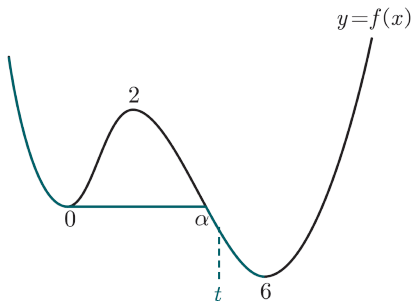
계속 $f(t)$ 가 최소
 $\therefore g(t) = f(t)$

(2) $0 \leq t \leq \alpha$ 일 때



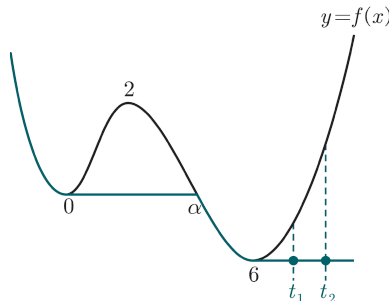
계속 $f(0)$ 이 최소
 $\therefore g(t) = f(0)$

(3) $\alpha < t < 6$ 일 때



계속 $f(t)$ 가 최소
 $\therefore g(t) = f(t)$

(4) $t \geq 6$ 일 때

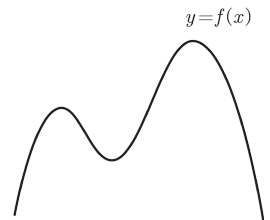


계속 $f(6)$ 이 최소
 $\therefore g(t) = f(6)$

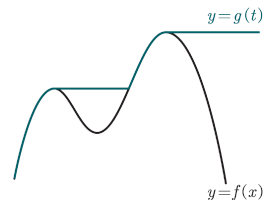
앞에서 했던 과정을 모두 이해했다면 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

위와 같이 구간 $(-\infty, t]$ 에서의 최댓값 또는 최솟값으로 만든 함수는 몇 번만 그려봐도 요령이 생긴다. 극대나 극소를 만나면 상수함수가 되고, 그러다 곡선과 다시 만나면 곡선을 따라가도록 그려주면 된다. 각주¹⁾에 예시가 있다.

1) 곡선 $y=f(x)$ 의 그래프가 아래와 같다.



이때 $x \leq t$ 인 실수 t 에 대해서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 의 그래프는 아래와 같이 그려주면 된다.

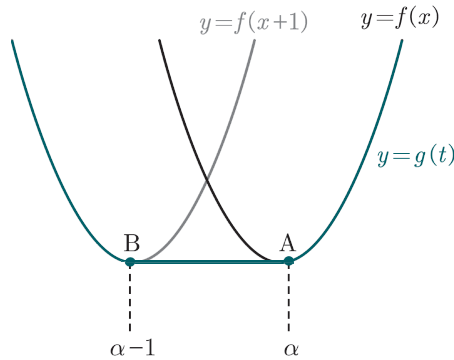


체화하기 <풀이>

개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

Ex 2 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 구간 $[t, t+1]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, $g(0) = g(3) = 0$ 이다. $f(5)$ 의 값은?

🔍 풀이 이제 충분히 연습했으니 바로 그려보자.

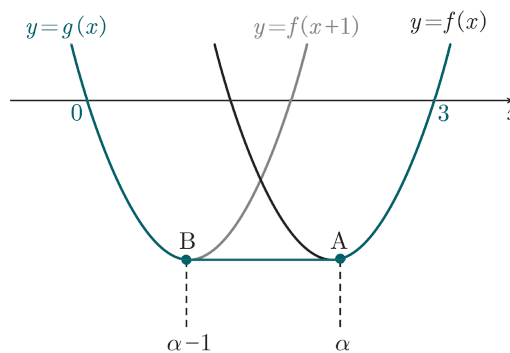


위와 같이 곡선 $y = f(x)$ 의 대칭축을 $x = \alpha$ 라 하면 곡선 $y = f(x+1)$ 의 대칭축은 $x = \alpha - 1$ 이고, 두 점 A, B 사이의 거리는 1 임을 알 수 있다. 주어진 조건 $g(0) = g(3) = 0$ 을 아래와 같이 해석해 보자.

$$g(0) = g(3) = 0$$

→ 곡선 $y = g(x)$ 는 x 축과 $x = 0, x = 3$ 에서 교점을 갖는다.

따라서 가능한 x 축의 위치는 아래와 같다.



즉, 곡선 $y = f(x+1)$ 은 $(0, 0)$ 을 지나고 곡선 $y = f(x)$ 는 $(3, 0)$ 을 지나므로 $f(1) = 0, f(3) = 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 $f(x) = (x-1)(x-3)$ 이고 정답은 $f(5) = 4 \times 2 = 8$ 이다.

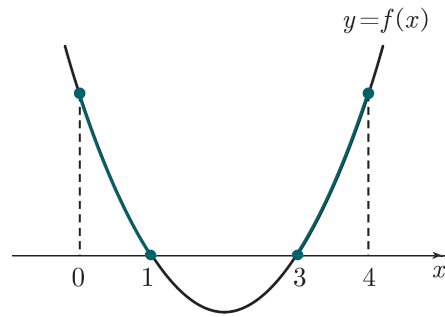
다음 장의 또 다른 풀이가 있으니 반드시 읽고 넘어가도록 하자.

💡 **풀이** 앞에서 연습했던 것과 같이 $g(t)$ 의 그래프를 그려 문제를 풀어도 되지만, 조건을 있는 그대로 해석할 수도 있어야 여러 가지 관점에서 문제를 해석할 수 있으므로 문제에서 주어진 조건을 있는 그대로 해석해 보자.

$$g(0) = g(3) = 0$$

→ 구간 $[0, 1]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값과
구간 $[3, 4]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 모두 0이다.

라고 해석하면, 함수 $f(x)$ 의 그래프를 아래와 같이 바로 생각할 수 있다.



따라서 $f(x) = (x-1)(x-3)$ 이고, $f(5) = 4 \times 2 = 8$ 이다.

N제 입문하기

개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

37

4점 중반

해설 p.63

삼차함수 $f(x)$ 와 양의 실수 t 에 대하여 구간 $[0, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -1$$

(나) 함수 $g(t)$ 는 오직 $t = 1$ 에서만 미분가능하지 않다.

$f'(2) = 0$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.

38

$f'(2) < 0$ 이고 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g(2) = g(3) = 0$$

(나) 함수 $g(t)$ 는 $t = 0$ 에서 극대이다.

$f(8)$ 의 값을 구하시오.

4점 중반

해설 p.65

기출 도전하기

개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

해설 p.66

39 함수 $f(x) = |x^3 - 3x + 8|$ 과 실수 t 에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha$ 와 $t = \beta$ 에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta = m + n\sqrt{6}$ 일 때, $m + n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 정수이다.) [4점]

< 출처 > 2024년 3월 22번

N제 정복하기

개념 → 체화하기 → N제 입문하기 → 기출 도전하기 → N제 정복하기

40 최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 와 양의 실수 t 에 대하여 구간 $[0, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$, 구간 $[t, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $h(t)$ 라 하자. 세 함수 $f(x)$, $g(t)$, $h(t)$ 와 상수 α ($\alpha > 3$) 가 다음 조건을 만족시킨다.

해설 p.67

- (가) $f'(x) \geq 0$ 인 실수 x 의 최솟값은 1 이다.
- (나) $g(t) = h(t)$ 를 만족시키는 양수 t 의 값의 범위는 $t = 3$ 또는 $t \geq \alpha$ 이다.

$f(6) - f(0)$ 의 값을 구하시오.